Leçon 06 – Cours : Suites récurrentes

- -

Objectif : Reconnaître et déterminer des suites récurrentes d'ordre 1 et 2, avec un second membre simple.
Cette leçon est courte et s'inscrit dans la continuité de la leçon 1 sur les suites mais elle ne nécessite aucun autre pré-requis. Elle n'en est pas moins importante et très utile en économie car beaucoup de situations économiques se traduisent mathématiquement par de telles suites lorsque le temps est envisagé de façon séquentielle.

1. Les suites récurrentes linéaires du 1er ordre à coefficients constants.

1.1. Définitions

Ce sont les suites u définies par $\begin{cases} u_0 \\ u_{n+1} = au_n + g(n) \end{cases} \quad a \in \mathbf{R}^* \qquad (1)$

L'équation homogène associée à (1) est : $v_{n+1} = av_n$ (2).

Théorème : Si u^* est une solution particulière de (1) et si v est la solution générale de (2) (équation homogène associée à (1)), la solution générale de (1) est

$$\mathbf{u = u^* + v}.$$

Démonstration :
Soit u^* une solution particulière de (1) : $u^*_{n+1} = au^*_n + g(n)$
u est une solution quelconque de (1) si et seulement si $u_{n+1} = au_n + g(n)$
Soit : $u_{n+1} - u^*_{n+1} = a(u_n - u^*_n)$ et $u - u^*$ est solution de (2).

Or les solutions de (2) sont de la forme : $\boxed{v_n = v_0 a^n}$

Donc $\boxed{u_n = u^*_n + v_0 a^n}$ $v_0 \in \mathbf{R}$ (*remarque* : $u_0 = u^*_0 + v_0$)

1.2. Recherche de la solution particulière de (1)

***Cas où g(n) = P(n)** avec P est un polynôme de degré k.
Si $a \neq 1$ alors une solution particulière est un polynôme Q(n) de degré k.
Si a = 1 , une solution particulière est de la forme nQ(n) , où Q est un polynôme de degré k (on dit qu'il y a **résonance**).

N.B. : g(n) = b (cte) est un cas particulier de celui-ci, il correspond à k = 0.

Cas où $g(n) = Ct^n$ (C et t constantes réelles données)
Si $t \neq a$ une solution particulière est sous la forme : $u^*_n = Kt^n$ (K constante à déterminer)
Si t = a une solution particulière est sous la forme $u^*_n = Kna^n$ (phénomène de **résonance**)

Remarque : on peut remplacer C par un polynôme de degré k, K est alors remplacé par un polynôme quelconque de degré k.

*Si u^*_n est solution particulière de $u_{n+1} = au_n + g_1(n)$ et si w^*_n est une solution particulière de $u_{n+1} = au_n + g_2(n)$ alors $u^*_n + w^*_n$ est une solution particulière de $u_{n+1} = au_n + g_1(n) + g_2(n)$.

Exemples

Equation	Solution de l'équation homogène associée	Forme de la solution particulière
$u_{n+1} = 2u_n + 3.5^n$	$v_n = v_o\, 2^n$	$u^*_n = C.5^n$
$u_{n+1} = 2u_n + n^2 - n$	$v_n = v_o\, 2^n$	$u^*_n = an^2 + bn + c$
$u_{n+1} = 2u_n + 3.2^n$	$v_n = v_o\, 2^n$	$u^*_n = Cn.2^n$
$u_{n+1} = u_n + n^2 - n$	$v_n = v_o$	$u^*_n = n(an^2 + bn + c)$

Il y a résonance pour les deux dernières équations.

2. Suites récurrentes linéaires du second ordre à coefficients constants.

2.1. Définitions

Ces suites sont définies par u_0 et u_1 et une relation de la forme :

$$\begin{cases} u_0 \ , u_1 \\ u_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = g(n) \quad b\in\mathbf{R}^* \ , c\in\mathbf{R}^* \end{cases} \qquad (1)$$

L'équation homogène associée à (1) est :

$$v_{n+2} + bv_{n+1} + cv_n = 0 \qquad (2).$$

Théorème : Si u^* est une solution particulière de (1) et si v est la solution générale de (2), la solution générale de (1) est : $u = u^* + v$.

Même démonstration que pour les suites récurrentes linéaires du 1er ordre .

2.2. Solution générale de l'équation homogène (2)

L'équation caractéristique de (2) est : $r^2 + br + c = 0$ (3).

Si $\Delta > 0$ (3) a deux solutions distinctes r_1 et r_2, et

$\mathbf{v_n = \lambda r_1{}^n + \mu r_2{}^n}$ est la solution générale de (2).

(λ et μ sont des réels dépendant des conditions initiales u_0 et u_1)

Si $\Delta = 0$ (3) a une solution double r_0 , et

$\mathbf{v_n = \lambda r_0{}^n + \mu n r_0{}^n}$ est la solution générale de (2).

(λ et μ sont des réels dépendant des conditions initiales u_0 et u_1)

Le cas **$\Delta < 0$** n'est pas étudié dans le cadre de ce cours et sera traité dans le cours de L3 après l'introduction des nombres complexes.

2.3. Recherche de la solution particulière de (1)

***Cas où g(n) = P(n)** avec P est un polynôme de degré k.

Si 1 n'est pas racine de (3) , on cherche une solution particulière u^* de (1) sous la forme d'un polynôme Q de degré k : $u^*_n = Q(n)$.
Si 1 est racine simple de (3), u^* est de la forme : $u^*_n = nQ(n)$ (résonance).
Si 1 est racine double de (3), u^* est de la forme : $u^*_n = n^2Q(n)$ (double résonance).

***Cas où g(n) = Ct** (C et t sont des réels non nuls donnés).

Si t n'est pas racine de (3), une solution particulière u^* de (1) est de la forme
$u^*_n = kt^n$ (k constante réelle à déterminer).

Si t est racine simple de (3), une solution particulière u^* de (1) est de la forme
$u^*_n = knt^n$ (résonance). k constante réelle à déterminer.
Si t est racine double de (3), une solution particulière u^* de (1) est de la forme
$u^*_n = kn^2t^n$ (double résonance). k constante réelle à déterminer.

*Si u^*_n est solution particulière de $u_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = g_1(n)$ et si w^*_n est une solution particulière de $u_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = g_2(n)$ alors $u^*_n + w^*_n$ est une solution particulière de $u_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = g_1(n) + g_2(n)$.

Exemples

Équation	Racines de l'équation caractéristique	Solution de l'équation homogène	Forme de la solution particulière
$u_{n+2} - 5u_{n+1} + 6u_n = 3.5^n$	2 et 3	$v_0 = \lambda 2^n + \mu 3^n$	$u^*_n = C.5^n$
$u_{n+2} - 5u_{n+1} + 6u_n = n^2 - n$	2 et 3	$v_0 = \lambda 2^n + \mu 3^n$	$u^*_n = an^2 + bn + c$
$u_{n+2} - 4u_{n+1} + 4u_n = 3.5^n$	2, racine double	$v_0 = \lambda 2^n + \mu n 2^n$	$u^*_n = C.5^n$
$u_{n+2} - 5u_{n+1} + 6u_n = 3.2^n$	2 et 3	$v_0 = \lambda 2^n + \mu 3^n$	$u^*_n = Cn.2^n$
$u_{n+2} - 3u_{n+1} + 2u_n = n^2 - n$	1 et 2	$v_0 = \lambda + \mu 2^n$	$u^*_n = n(an^2 + bn + c)$
$u_{n+2} - 4u_{n+1} + 4u_n = 3.2^n$	2, racine double	$v_0 = \lambda 2^n + \mu n 2^n$	$u^*_n = Cn^2.2^n$
$u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n = n^2 - n$	1, racine double	$v_0 = \lambda + \mu n$	$u^*_n = n^2(an^2 + bn + c)$

Exercices

Exercice 1

Déterminer u telle que : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ 3u_{n+1} = u_n + n^2 + 2n \end{cases}$.

Exercice 2

Déterminer u telle que : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} - 4u_n = 3^n - 1 \end{cases}$.

Exercice 3

Déterminer u telle que : $\begin{cases} u_0 = -1 \\ 2u_{n+1} = u_n + 3\left(\frac{1}{2}\right)^n \end{cases}$.

Exercice 4

Déterminer u telle que : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_n = 2u_{n-1} + n^2 - 2 \end{cases}$.

Exercice 5

Déterminer u telle que : $\begin{cases} u_0 = \dfrac{2e}{2e+1} \\ u_{n+1} + 2u_n + e^{-n-1} = 0 \end{cases}$.

Exercice 6

Déterminer u telle que : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = u_n + n - 1 \end{cases}$.

Exercice 7

Déterminer u telle que : $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_n + 3\,u_{n-1} = (-3)^n + 1 \end{cases}$.

Exercice 8

Déterminer u telle que : $\begin{cases} u_0 = 3 \text{ et } u_1 = 3 \\ 2u_{n+2} = 3u_{n+1} - u_n - 1 + n \end{cases}$.

Exercice 9

Déterminer u telle que : $\begin{cases} u_0 = 1 \text{ et } u_1 = 0 \\ 4u_{n+2} = u_n + 2 \end{cases}$.

Exercice 10

Déterminer u telle que : $\begin{cases} u_0 = 1 \text{ et } u_1 = 1 \\ u_n - 5u_{n-1} + 6u_{n-2} = 2^n + 1 \end{cases}$.

Exercice 11

Déterminer u telle que : $\begin{cases} u_0 = 0 \text{ et } u_1 = 1 \\ u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n + 1 \end{cases}$.

Exercice 12

Déterminer u telle que : $\begin{cases} u_0 = 2 \text{ et } u_1 = -1 \\ u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n + 2n + 1 \end{cases}$.

Exercice 13

Déterminer u telle que : $\begin{cases} u_0 = 1 \text{ et } u_1 = -1 \\ 3u_{n+2} = -2u_{n+1} + 5u_n + 3 \end{cases}$.

Exercice 14

Déterminer u telle que : $\begin{cases} u_0 = 0 \text{ et } u_1 = 1 \\ u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n + 2^n \end{cases}$.

Exercice 15

Déterminer u telle que : $\begin{cases} u_0 = 1 \text{ et } u_1 = 27 \\ u_n - 9u_{n-1} + 20u_{n-2} = 5^n + 12 \end{cases}$.

Exercice 16

Déterminer (u_n) telle que $u_{n+2} + 4u_{n+1} + 3u_n = a^n + 8$, suivant les valeurs du paramètre a.