EXEMPLE :

Diagonaliser $A = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}$.

Solution

Pour simplifier les explications, supposons que A est la matrice d'une application f de $\mathbf{IR}^2$ dans $\mathbf{IR}^2$ dans la base canonique de $\mathbf{IR}^2$. Utilisons les mêmes notations que plus haut.

1$^{\text{ère}}$ étape : calcul des valeurs propres

Ce sont les racines du polynôme caractéristique $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} (-4-\lambda) & 3 \\ -6 & (5-\lambda) \end{vmatrix}$

$P_A(\lambda) = (-4-\lambda)(5-\lambda) + 18 = \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda + 1)(\lambda - 2)$.

A a donc deux valeurs propres distinctes $\lambda_1 = -1$ et $\lambda_2 = 2$.

2$^{\text{ème}}$ étape : recherche des vecteurs propres

• $V = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre $\lambda_1 = -1$ si et seulement si $AV = \lambda_1 V$, ce qui donne $\begin{pmatrix} -4x+3y \\ -6x+5y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$ soit $\begin{cases} -4x + 3y = -x \\ -6x + 5y = -y \end{cases}$ ou $x = y$ et $V = \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Tous les vecteurs propres associés à λ_1 sont proportionnel à $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

• $V = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre $\lambda_2 = 2$ si et seulement si $AV = \lambda_2 V$, ce qui donne $\begin{pmatrix} -4x+3y \\ -6x+5y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$ soit $\begin{cases} -4x + 3y = 2x \\ -6x + 5y = 2y \end{cases}$ ou $y = 2x$ et $V = \begin{pmatrix} x \\ 2x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Tous les vecteurs propres associés à λ_2 sont proportionnel à $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

3$^{\text{ème}}$ étape : réduction de A

D'après les calculs précédents $\{v_1 , v_2\}$ est une base de $\mathbf{IR}^2$ dans laquelle la matrice de f est la matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

La matrice de passage de la base canonique de $\mathbf{IR}^2$ vers $\{v_1 , v_2\}$ est $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ (par définition les colonnes de P sont les coordonnées de v_1 et v_2 dans la base canonique de $\mathbf{IR}^2$ c'est-à-dire V_1 et V_2).

On a : $A = PDP^{-1}$.