Solution

1.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. f(u) = (1 , 0 , -1) = -u , f(v) = (1 , -1 , 0) = -v et f(w) = 2 , 2 , 2) = 2w.
On en déduit que u est un vecteur propre de f associé à la valeur propre $\lambda_1 = -1$, v estaussi un vecteur propre de f associé à la valeur propre $\lambda_1 = -1$ et w est un vecteur propre de f associé à la valeur propre $\lambda_2 = 2$.

3. $\det(u,v,w) = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -6 \neq 0$. {u , v , w} est une famille de 3 vecteurs de $\mathbf{IR}^3$ libre, c'est donc une base de $\mathbf{IR}^3$et d'après les résultats de la question précédente la matrice de f dans cette base est

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

et f est diagonalisable.

4. Par définition $P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Calcul de P^{-1} : en utilisant la méthode du cours on est amené à résoudre $\begin{cases} -x - y + z = a & (1) \\ y + z = b & (2) \\ y + z = c & (3) \end{cases}$.

(1) + (2) + (3) donne 3z = a + b + c soit $z = \frac{1}{3}(a + b + c)$ et $y = c - z = \frac{1}{3}(-a + 2b - c)$ et

$x = \frac{1}{3}(-a - b + 2c)$ soit $\begin{cases} x = \frac{1}{3}(-a - b + 2c) \\ y = \frac{1}{3}(-a + 2b - c) \\ z = \frac{1}{3}(a + b + c) \end{cases}$ et $P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

5. D'après le cours $A = PBP^{-1}$.