Solution

On a vu que les valeurs propres de A_1 sont les racines de $\det(A_1-\lambda I_3) = 0$.

Or $\det(A_1-\lambda I_3) = \begin{vmatrix} -\lambda & 7 & -6 \\ -1 & 4-\lambda & O \\ 0 & 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda - 2.$

Or $-\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda - 2 = -(\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda-2)$. A_1 a donc 3 valeurs propres distinctes :

$\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$ et $\lambda_3 = 2$.

Cherchons un vecteur propre v_1 associé à λ_1:

Et si v_1 a pour coordonnées dans la base de départ $V_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$: $\begin{cases} 7y - 6z = -x \\ -x + 4y = -y \\ 2y - 2z = -z \end{cases}$ puisque

$A_1V_1 = -V_1$. On obtient alors $\begin{cases} x = 5y \\ z = 2y \end{cases}$. Donc tous les vecteurs propres associés à λ_1 ont une

matrice de coordonnées dans la base de départ de la forme $\begin{pmatrix} 5y \\ y \\ 2y \end{pmatrix}$ avec $y\neq 0$ et $V_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

convient.

Cherchons de même v_2 , vecteurs propre associé à λ_2 :

ses coordonnées dans la base de départ, $V_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ vérifient : $\begin{cases} 7y - 6z = x \\ -x + 4y = y \\ 2y - 2z = z \end{cases}$ puisque

$A_1V_2 = V_2$.

Soit $\begin{cases} x = 3y = \frac{9}{2}z \\ y = \frac{3}{2}z \end{cases}$. Donc $V_2 = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ convient.

Si $V_3 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ est la matrice des coordonnées dans la base de départ d'un vecteur propre v_3

associé à λ_3:

$\begin{cases} 7y - 6z = 2x \\ -x + 4y = 2y \\ 2y - 2z = 2z \end{cases}$ soit $\begin{cases} x = 2y = 4z \\ y = 2z \end{cases}$ et $V_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ convient.

A_1 est donc diagonalisable, puisque v_1, v_2 et v_3 déterminent bien une base de $\mathbf{R}^3$ (leur

déterminant est non nul) et A_1 est semblable à $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. En effet si A_1 est la matrice

d'une application linéaire f dans la base canonique **b** de $\mathbf{R}^3$, La matrice de f dans la base **b'** = $\{v_1 , v_2 , v_3\}$ est D .

Et si P est la matrice de passage de **b** dans **b'** : $P = \begin{pmatrix} 5 & 9 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $A = PDP^{-1}$ avec

$P^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 6 \\ 3 & -3 & -6 \\ -4 & 8 & 6 \end{pmatrix}$.

D'autre part $(A_1)^n = P\,D^n\,P^{-1}$ avec $D^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$.

D'où $(A_1)^n = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5(-1)^{n+1}+27-2^{n+4} & 5(-1)^{n+1}-27+2^{n+5} & 30(-1)^n-54+3.2^{n+3} \\ (-1)^{n+1}-9-2^{n+3} & (-1)^{n+1}-9+2^{n+4} & 6(-1)^n-18+3.2^{n+2} \\ 2(-1)^{n+1}+6-2^{n+2} & 2(-1)^{n+1}-6+2^{n+3} & 12(-1)^n-12+3.2^{n+1} \end{pmatrix}$.