Solution

A peut s'écrire $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}$ avec $A_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$ et $A_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $A_{22} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

Et si $A^{-1} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$ où les matrices B_{ij} sont des matrices (2,2) :

$AA^{-1} = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix}$ où I_2 est la matrice unité d'ordre 2.

$$\text{D'où : } \begin{cases} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} = I_2 \ (1) \\ A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} = 0 \ (2) \\ A_{22}B_{21} = 0 \ (3) \\ B_{22}A_{22} = I_2 \ (4) \end{cases}$$

Or (4) donne $B_{22} = A_{22}^{-1}$ et (3) donne $B_{21} = O$ puisque A_{22} est inversible.
Et puisque $B_{22} = A_{22}^{-1}$, (2) donne $A_{11}B_{12} = -A_{12}A_{22}^{-1}$ et puisque A_{11} est inversible, $B_{12} = -(A_{11}^{-1})A_{12}(A_{22}^{-1})$.
Et compte tenu du fait que $B_{21} = \mathbf{0}$, (1) donne $B_{11} = A_{11}^{-1}$.

$$\text{Soit } \begin{cases} B_{11} = A_{11}^{-1} \\ B_{12} = -(A_{11}^{-1})A_{12}(A_{22}^{-1}) \\ B_{21} = \mathbf{0} \\ B_{22} = A_{22}^{-1} \end{cases}$$ Or d'après l'énoncé :

$A_{11}^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ et $A_{22}^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. D'où $B_{12} = \begin{pmatrix} 21 & -24 \\ -10 & 11 \end{pmatrix}$

$$\text{Donc } A^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 21 & -24 \\ -3 & 1 & -10 & 11 \\ 0 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$