Solution

1) **b'** est un système de 3 vecteurs de $\mathbf{IR}^3$, ce sera donc une base si et seulement si c'est un système libre. Or $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$, **b'** est donc libre et c'est une base de $\mathbf{IR}^3$.

2) Ici on a les coordonnées des vecteurs de **b'** dans la base **b**. On a donc la matrice de passage de **b** à **b'** :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X = PX' \quad \text{donc} \quad \begin{cases} x = x' - y' + z' \\ y = x' + z' \\ z = y' + z' \end{cases}$$

Les vecteurs colonnes de P^{-1} sont les coordonnées des vecteurs de **b** dans **b'**.

Cherchons-les. La 1ère colonne de P^{-1} $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ représente les coordonnées de (1,0,0) dans **b'**.

Donc (1,0,0) = x(1,1,0) + y(-1,0,1) + z(1,1,1) et :

$$\begin{cases} 1 = x-y+z \\ 0 = x+z \\ 0 = y+z \end{cases} \quad \text{D'où } x = -1,\ y = -1 \text{ et } z = 1.$$

Les coordonnées de (1, 0, 0) dans **b'** sont donc : $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (1ère colonne de P^{-1})

De même la 2ème colonne de P^{-1} est $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, coordonnée de (0,1,0), d'où

(0,1,0) = x(1,1,0) + y(-1,0,1) + z(1,1,1) et $\begin{cases} 0 = x-y+z \\ 1 = x+z \\ 0 = y+z \end{cases}$

d'où $x = 2$, $y = 1$ et $z = -1$

Les coordonnées de (0,1,0) dans **b'** sont donc : $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ (2ème colonne de P^{-1})

De même, pour trouver la 3ème colonne de P^{-1}, on pose
(0,0,1) = x(1,1,0) + y(-1,0,1) + z(1,1,1) et :

$$\begin{cases} 0 = x-y+z \\ 0 = x+z \\ 1 = y+z \end{cases} \quad \text{d'où } x = -1,\ y = 0 \text{ et } z = 1$$

Les coordonnées de (0,0,1) dans **b'** sont donc : $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (3ème colonne de P^{-1})

D'où $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $X' = P^{-1}X$ soit $\begin{cases} x' = -x + 2y - z \\ y' = -x + y \\ z' = x - y + z \end{cases}$.

Pour trouver P^{-1} , on aurait aussi pu résoudre le système $\begin{cases} x = x' - y' + z' \\ y = x' + z' \\ z = y' + z' \end{cases}$, où x', y' et z' sont les inconnues et x, y et z des paramètres.
La méthode du pivot de Gauss donne

$\begin{cases} x' - y' + z' = x \\ y' = -x + y \\ y' + z' = z \end{cases}$, d'où $\begin{cases} x' - y' + z' = x \\ y' = -x + y \\ z' = x - y + z \end{cases}$ et $\begin{cases} x' = -x + 2y - z \\ y' = -x + y \\ z' = x - y + z \end{cases}$. On retrouve bien alors :

$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

3) f(1 , 0 , 0) = (2 , 1 , 0) ; f(0 , 1 , 0) = (-1 , 0 , 1) et f(0 , 0 , 1) = (1 , 0 , 1), d'où la matrice de f dans **b** : $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

D'après le cours si B est la matrice de f dans **b'** : $B = P^{-1}AP$.

D'où $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$