Solution

1) Il suffit de calculer le produit $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ et de vérifier qu'il vaut I_2.

2) $\begin{cases} x+3y = a \\ x+4y = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = b-a \\ x = a-3y \end{cases}$, soit $\begin{cases} x = 4a-3b \\ y = -a+b \end{cases}$.

Ainsi, on peut écrire

$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et d'après le cours

$B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = B^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. D'où $B^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

C'est une méthode pour calculer l'inverse d'une matrice.

3) $\begin{cases} x + 2y - z = a \\ 2x - y + 2z = b \\ x - 3y + z = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - z = a \\ 5y - 4z = 2a - b \\ 5y - 2z = a - c \end{cases}$ soit $\begin{cases} x + 2y - z = a \\ 5y - 4z = 2a - b \\ z = \frac{1}{2}(-a + b - c) \end{cases}$

$\begin{cases} x + 2y - z = a \\ 2x - y + 2z = b \\ x - 3y + z = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - z = a \\ y = \frac{1}{5}(b - 2c) \\ z = \frac{1}{2}(-a + b - c) \end{cases}$ et $\begin{cases} x = \frac{1}{10}(5a + b + 3c) \\ y = \frac{1}{5}(b - 2c) \\ z = \frac{1}{2}(-a + b - c) \end{cases}$.

D'où $C^{-1} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -4 \\ -5 & 5 & -5 \end{pmatrix}$.