Leçon 05 – Exercices

Exercice 1
Parmi les matrices suivantes, lesquelles sont inversibles :

$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 2
Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 6 & -6 \\ -2 & 7 & -6 \\ -1 & 4 & -4 \end{pmatrix}$. Vérifier que $A^3 - 2A^2 - A + 2I_3 = \mathbf{0}$ et en déduire A^{-1}.

Exercice 3
Résoudre $\begin{cases} 8x+5y = a \\ 5x+3y = b \end{cases}$, en déduire l'inverse de $B = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$.
Résoudre enfin $BX = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$.

Exercice 4
1) Soient dans la base canonique b de $\mathbf{IR}^3$, les vecteurs v de matrice $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, w de matrice $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$, et l'application linéaire f de matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On considère les trois les vecteurs v_1 de matrice $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, v_2 de matrice $V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et v_3 de matrice $V_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Montrer que $\{v_1 ; v_2 ; v_3\}$ forment une base b' de R^3 et écrire les matrices de v et w dans b'.
Donner la matrice de f dans b'.
2) Soit g l'application linéaire qui a pour matrice A dans b', donner la matrice de g dans b.

Exercice 5

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ où $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,

$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $M_1 = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1) Indiquer toutes les façons de choisir la division de M_1 en quatre blocs pour effectuer, par blocs, le produit $M.M_1$ avec les blocs A, B, C et D.
2) Parmi les résultats de la question précédente, retenir celui où A_1 est une matrice colonne et effectuer le produit $M.M_1$.

Exercice 6

Inverser par blocs, la matrice : $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$, en utilisant

$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 7

Soit $J = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & J_2 & 0 & . & 0 \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & J_k \end{pmatrix}$ avec $J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}$.

En remarquant que $J_i = \lambda_i I + N$ et en calculant N^2, N^3 … , calculer J_i^n , puis J^n.

Exercice 8

Déterminer les valeurs propres puis les vecteurs propres de A dans les cas suivants. Puis diagonaliser A et expliquer le calcul de A^n (le calcul de l'inverse des matrices de passage n'est pas demandé) :

1) $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}$ 2) $A = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 5 \\ -1 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 9

On considère l'application linéaire f de **IR**^{3} dans **IR**^{3} définie par
$f(x, y, z) = (x + ky , y+tz , x + y + z)$, où k et t sont des paramètres réels.

1) Ecrire les matrices de f dans la base canonique, puis dans la base $b = \{ (1,1,1) , (1,1,0) , (1,0,0) \}$.

2) Etudier le rang de ces matrices suivant les valeurs de k et t.

3) On choisit k = 0 et t = 1. Déterminer kerf et en donner une base. f est-elle diagonalisable ? Si oui préciser la base dans laquelle f est représentée par une matrice diagonale et préciser cette matrice.

Exercice 10

1) Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que $P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$

2) Soit $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Déterminer les valeurs propres de J.

Montrer que J est diagonalisable. Montrer que $J = PD\,P^{-1}$, avec D diagonale que l'on explicitera.

3) Expliquer comment on peut calculer J^n (justifier les formules utilisées et ne pas faire le calcul explicite des produits matriciels).

4) Soient les suites (u_n), (v_n) et (w_n) vérifiant les relations de récurrence :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{2} v_n \\ v_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + w_n) \\ w_{n+1} = \frac{1}{2} v_n \end{cases}$$

. Expliquer le calcul de u_n, v_n et w_n en fonction de n, u_0, v_0 et w_0.

Etudier la convergence de ces suites.

Exercice 11

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -6 \\ 0 & 3 & -4 \end{pmatrix}$ et soit f l'application linéaire de **IR**^{3} dans **IR**^{3} ayant A pour matrice représentative dans la base canonique b.

1) Calculer f(x, y, z) pour $(x, y, z) \in$ **IR**^{3}. f est-elle bijective ?

2) Chercher les valeurs propres de A et les vecteurs propres associés.

3) A est-elle diagonalisable ? (justifier). Si oui donner une matrice diagonale D (on ordonnera les valeurs propres par ordre croissant, de gauche à droite) semblable à A et la matrice de passage P correspondante telle que

$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Quelle est la relation qui lie A, D et P ?

4) Calculer A^n.

5) Soient les suites (u_n), (v_n) et (w_n) vérifiant les relations de récurrence :

$\begin{cases} u_{n+1} = 3\,u_n \\ v_{n+1} = 5\,v_n - 6\,w_n \\ w_{n+1} = 3\,v_n - 4\,w_n \\ u_0 = v_0 = 1 \text{ et } w_0 = -1 \end{cases}$. Pour $n \in \mathbf{N}$, calculer u_n, v_n et w_n en fonction de n.

Exercice 12

Soit $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1) Montrer que $J^2 = 2I + J$, où I désigne la matrice identité d'ordre 3.
En déduire J^{-1}.

2) Déterminer les valeurs propres de J. **Montrer** que J est diagonalisable.

Déterminer la matrice de passage P de première ligne (1 0 1) et telle que $P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

, et vérifiant $J = PD\,P^{-1}$, avec D diagonale (on ordonnera les valeurs propres par ordre croissant).

3) Calculer J^n (justifier les formules utilisées).

4) Soient les suites (u_n), (v_n) et (w_n) vérifiant les relations de récurrence :

$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{4}(v_n + w_n) \\ v_{n+1} = \frac{1}{4}(u_n + w_n) \\ w_{n+1} = \frac{1}{4}(u_n + v_n) \end{cases}$. Calculer u_n, v_n et w_n en fonction de u_0, v_0 et w_0.

Exercice 13

On considère $\mathbf{IR}^3$ muni de la base canonique **b**.

1) Montrer que si **b'** = {(1, 1, 0) ; (1, 0, -1) ; (1, 1, 1)}, **b'** est aussi une base de $\mathbf{IR}^3$.

2) Un vecteur V de $\mathbf{IR}^3$ a pour coordonnées $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dans **b** et $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ dans **b'**. Donner la matrice P de passage de **b** à **b'** et la matrice P^{-1} de passage de **b'** à **b**. En déduire X en fonction de x', y' et z' et X' en fonction de x, y et z.

3) Soit f l'application linéaire de $\mathbf{IR}^3$ dans $\mathbf{IR}^3$ définie par :
$f(x , y , z) = (4x - 5y + 4z , 4x - 5y + 4z , 3x - 3y + 3z)$. Déterminer la matrice de f dans **b** et puis la matrice de f dans **b'**.
Déterminer alors Imf et kerf ainsi que les vecteurs propres et les valeurs propres de f.