Leçon 05 – Exercices

Exercice 1
Parmi les matrices suivantes, lesquelles sont inversibles :

$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$ $\quad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Solution

$\text{dét}A = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$. A est donc inversible.

$\text{dét}B = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} = 0$. Donc B n'est pas inversible.

$\text{dét}C = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$. Donc C n'est pas inversible.

$\text{dét}D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$. Donc D est inversible.

Exercice 2

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 6 & -6 \\ -2 & 7 & -6 \\ -1 & 4 & -4 \end{pmatrix}$. Vérifier que $A^3 - 2A^2 - A + 2I_3 = \mathbf{0}$ et en déduire A^{-1}.

Solution

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 6 & -6 \\ -2 & 7 & -6 \\ -1 & 4 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 6 & -6 \\ -2 & 7 & -6 \\ -1 & 4 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 12 & -6 \\ -6 & 13 & -6 \\ -3 & 6 & -2 \end{pmatrix},$$

$$A^3 = A^2A = \begin{pmatrix} -5 & 12 & -6 \\ -6 & 13 & -6 \\ -3 & 6 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 6 & -6 \\ -2 & 7 & -6 \\ -1 & 4 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 & 30 & -18 \\ -14 & 31 & -18 \\ -7 & 16 & -10 \end{pmatrix} \text{ et on vérifie que}$$

$$A^3 - 2A^2 - A + 2I_3 = \begin{pmatrix} -13 & 30 & -18 \\ -14 & 31 & -18 \\ -7 & 16 & -10 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} -5 & 12 & -6 \\ -6 & 13 & -6 \\ -3 & 6 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 6 & -6 \\ -2 & 7 & -6 \\ -1 & 4 & -4 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On déduit que $A(A^2 - 2A - I_3) = -2I_3$ et $A[-\frac{1}{2}(A^2 - 2A - I_3)] = I_3$.

D'où $A^{-1} = -\frac{1}{2}(A^2 - 2A - I_3) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1/2 & 1 & -5/2 \end{pmatrix}$.

Exercice 3

Résoudre $\begin{cases} 8x+5y = a \\ 5x+3y = b \end{cases}$, en déduire l'inverse de $B = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$.

Résoudre enfin $BX = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$.

Solution

$S \begin{cases} 8x+5y = a \\ 5x+3y = b \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} 40x+25y = 5a \\ 40x+24y = 8b \end{cases}$ soit $\begin{cases} y = 5a - 8b \\ x = \frac{1}{5}(b - 3y) \end{cases}$ ou $S' \begin{cases} x = -3a + 5b \\ y = 5a - 8b \end{cases}$.

Or matriciellement S s'écrit $B\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, ce qui équivaut à $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = B^{-1}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. Et S' donne $B^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 5 & -8 \end{pmatrix}$.

$BX = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ équivaut à $X = B^{-1}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ (en multipliant à gauche chaque membre de l'équation par B^{-1}).

D'où $X = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 5 & -8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 & -16 \\ 23 & 26 \end{pmatrix}$.

Exercice 4

1) Soient dans la base canonique b de $\mathbb{R}^3$, les vecteurs v de matrice $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, w de matrice $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$, et l'application linéaire f de matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On considère les trois les vecteurs v_1 de matrice $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, v_2 de matrice $V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et v_3 de matrice $V_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Montrer que $\{v_1 ; v_2 ; v_3\}$ forment une base b' de R^3 et écrire les matrices de v et w dans b'.
Donner la matrice de f dans b'.
2) Soit g l'application linéaire qui a pour matrice A dans b', donner la matrice de g dans b.

Solution

1) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$, les trois vecteurs de $\mathbf{IR}^3$ v_1, v_2 et v_3 sont donc libres et forment une base de $\mathbf{IR}^3$.

Si $v = (x_1,x_2,x_3) = av_1 + bv_2 + cv_3$, v a pour matrice $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ dans la base **b'**.

Or $(x_1,x_2,x_3) = av_1 + bv_2 + cv_3$ équivaut à $\begin{cases} x_1 = a \\ x_2 = 2b + c \\ x_3 = a + c \end{cases}$, d'où $\begin{cases} a = x_1 \\ b = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 - x_3) \\ c = -x_1 + x_3 \end{cases}$. D'où les coordonnées de v dans **b'** : $X' = \begin{pmatrix} x_1 \\ \frac{1}{2}(x_1 + x_2 - x_3) \\ -x_1 + x_3 \end{pmatrix}$ (1)

Par un calcul analogue, w a pour matrice $Y' = \begin{pmatrix} y_1 \\ \frac{1}{2}(y_1 + y_2 - y_3) \\ -y_1 + y_3 \end{pmatrix}$ dans **b'**.

Si P est la matrice de passage de **b** vers **b'**, d'après le cours, les colonnes de P sont les coordonnées des vecteurs de **b'** dans **b**, donc $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. D'autre part $X = PX'$ et $X' = P^{-1}X$, P^{-1} est la matrice de passage de **b'** vers **b**. Et d'après le calcul précédent, (1) donne $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Toujours d'après le cours si B est la matrice de f dans **b'**,

$$B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2) Si C est la matrice de g dans **b** : $C = PAP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 5

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ où $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,

$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $M_1 = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1) Indiquer toutes les façons de choisir la division de M_1 en quatre blocs pour effectuer, par blocs, le produit $M.M_1$ avec les blocs A, B, C et D.

2) Parmi les résultats de la question précédente, retenir celui où A_1 est une matrice colonne et effectuer le produit $M.M_1$.

Solution

1) Pour faire le produit $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix}$, il faut faire les produits AA_1, BC_1, CA_1, DC_1, AB_1, BD_1, CB_1 et DD_1.

On doit donc avoir :

nombre de colonnes de A = nombre de lignes de A_1 = 3,
nombre de colonnes de B = nombre de lignes de C_1 = 1,
nombre de colonnes de C = nombre de lignes de A_1 = 3,
nombre de colonnes de D = nombre de lignes de C_1 = 1,
nombre de colonnes de A = nombre de lignes de B_1 = 3,
nombre de colonnes de B = nombre de lignes de D_1 = 1,
nombre de colonnes de C = nombre de lignes de B_1 = 3,
nombre de colonnes de D = nombre de lignes de D_1 = 1.

Ce sont les seuls impératifs. Les nombre de colonnes de A_1, B_1, C_1 et D_1 sont au choix, mais A_1 et C_1, ainsi que B_1 et D_1, ont le même nombre de colonnes.

1^er^ choix : $A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $C_1 = (-1)$, $B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $D_1 = (3\ 1\ 1)$

2^ème^ choix : $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $C_1 = (-1\ 3)$, $B_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $D_1 = (1\ 1)$.

3^ème^ choix : $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $C_1 = (-1\ 3\ 2)$, $B_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $D_1 = (1)$

2) Cela correspond au 3^ème^ choix de la question 1)

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AA_1+BC_1 & AB_1+BD_1 \\ CA_1+DC_1 & CB_1+DD_1 \end{pmatrix}$$

$AA_1 + BC_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$, $AB_1 + BD_1 = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 4 \\ -5 & 8 & 1 \end{pmatrix}$, $CA_1 + DC_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}$ et $CB_1 + DD_1 = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 3 & 11 & 9 \end{pmatrix}$,

d'où $MM_1 = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -2 & 4 \\ 5 & -5 & 8 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & -1 \\ 6 & 3 & 11 & 9 \end{pmatrix}$.

Exercice 6

Inverser par blocs, la matrice : $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$, en utilisant

$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$.

Solution

$A = \begin{pmatrix} B & C \\ D & E \end{pmatrix}$ avec $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ et $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$.

On est alors amené à chercher 4 matrices (2,2) X, Y, Z et T telles que $\begin{pmatrix} B & C \\ D & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X & Y \\ Z & T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_2 \end{pmatrix}$

(**0** désigne la matrice nulle carrée d'ordre 2).

On a alors à résoudre le système : $\begin{cases} BX + CZ = I_2 & (1) \\ BY + CT = \mathbf{0} & (2) \\ DX + EZ = \mathbf{0} & (3) \\ DY + ET = I_2 & (4) \end{cases}$.

(1) équivaut à $BX = I_2 - CZ = I_2$, et $X = B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ d'après l'énoncé

(2) équivaut à $BY = -CT = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, et $Y = B^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(3) équivaut à $EZ = -DX$ et $Z = -E^{-1}DX$. D'où $Z = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1/2 & -2 \end{pmatrix}$.

(4) équivaut à $ET = I_2 - DY == I_2$. D'où $T = E^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -5/2 & 1/2 \end{pmatrix}$.

D'où $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & -2 & -5/2 & 1/2 \end{pmatrix}$.

Exercice 7

Soit $J = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & J_2 & 0 & . & 0 \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & J_k \end{pmatrix}$ avec $J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}$.

En remarquant que $J_i = \lambda_i I + N$ et en calculant N^2, N^3 … , et en remarquant $\lambda_i I$ et N commutent que calculer J_i^n , puis J^n. On pourra utiliser l'exercice 10 de la leçon 4.

Solution

$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$.

$J_i = \lambda_i I + N$ et $\lambda_i I$ et N commutent, on peut donc appliquer la formule du Binôme de Newton (c.f. la correction de l'exercice 10 de la leçon 4) et $J_i^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k N^k (\lambda_i I_3)^{n-k}$,

$J_i^n = (\lambda_i I_3)^n + nN(\lambda_i I_3)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} N^2 (\lambda_i I_3)^{n-2}$. En effet la formule s'arrête à ce terme car toutes les puissances de N supérieures ou égales à 3 sont nulles.

$$J_i^n = \begin{pmatrix} (\lambda_i)^n & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda_i)^n & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda_i)^n \end{pmatrix} + n(\lambda_i)^{n-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{n(n-1)}{2} (\lambda_i)^{n-2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$J_i^n = \begin{pmatrix} (\lambda_i)^n & n(\lambda_i)^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2}(\lambda_i)^{n-2} \\ 0 & (\lambda_i)^n & n(\lambda_i)^{n-1} \\ 0 & 0 & (\lambda_i)^n \end{pmatrix}. \text{ Et } J^n = \begin{pmatrix} J_1^n & 0 & . & . & 0 \\ 0 & J_2^n & 0 & . & 0 \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & J_k^n \end{pmatrix}.$$

Exercice 8

Déterminer les valeurs propres puis les vecteurs propres de A dans les cas suivants. Puis diagonaliser A et expliquer le calcul de A^n (le calcul de l'inverse des matrices de passage n'est pas demandé) :

1) $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}$ 2) $A = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 5 \\ -1 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Solution

1) $P_A(\lambda) = \text{dét}(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -4 \\ -6 & 5-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 8\lambda - 9 = (\lambda + 1)(\lambda - 9)$. D'après le cours, les valeurs propres de A sont les racines de $P_A(\lambda)$; A a donc deux valeurs propres distinctes (A est donc diagonalisable), $\lambda_1 = -1$ et $\lambda_2 = 9$.

$V_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ_1 si et seulement si

$\begin{cases} AV_1 = \lambda_1 V_1 \\ V_1 \neq \mathbf{0} \end{cases}$ ($\mathbf{0}$ désigne la matrice colonne nulle), soit $\begin{cases} 3x - 4y = -x \\ -6x + 5y = -y \\ V_1 \neq \mathbf{0} \end{cases}$ soit $x = y \neq 0$.

$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ convient.

$V_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ_2 si et seulement si

$\begin{cases} AV_2 = \lambda_2 V_2 \\ V_2 \neq \mathbf{0} \end{cases}$, soit $\begin{cases} 3x - 4y = 9x \\ -6x + 5y = 9y \\ V_2 \neq \mathbf{0} \end{cases}$ soit $3x + 2y = 0$ et $V_2 \neq \mathbf{0}$. $V_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ convient.

Si $P = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$, $A = PDP^{-1}$.

$A^n = PDP^{-1}\ PDP^{-1} \ldots\ PDP^{-1} = PD^n P^{-1}$ et $D^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 9^n \end{pmatrix}$.

2) $P_A(\lambda) = \text{dét}(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} -\lambda & 10 & 5 \\ -1 & 2-\lambda & 5 \\ 0 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 + 3\lambda^2 - 2\lambda = -\lambda(\lambda - 2)(\lambda - 1)$. D'après le cours, les valeurs propres de A sont les racines de $P_A(\lambda)$; A a donc trois valeurs propres distinctes (A est donc diagonalisable), $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = 1$ et $\lambda_3 = 2$.

$V_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ_1 si et seulement si

$\begin{cases} AV_1 = \lambda_1 V_1 \\ V_1 \neq \mathbf{0} \end{cases}$ (on note **0** la matrice colonne nulle), soit $\begin{cases} 10y + 5z = 0 \\ -x + 2y + 5z = 0 \\ 2y + z = 0 \\ V_1 \neq \mathbf{0} \end{cases}$ soit $\begin{cases} x = -8y \\ z = -2y \\ V_1 \neq \mathbf{0} \end{cases}$.

$V_1 = \begin{pmatrix} -8 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ convient.

Remarque utile : Un vecteur propre associé à la valeur propre 0 est toujours un vecteur du noyau de l'application linéaire de matrice A dans une base quelconque et réciproquement.

$V_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ_2 si et seulement si

$\begin{cases} AV_2 = \lambda_2 V_2 \\ V_2 \neq \mathbf{0} \end{cases}$, soit $\begin{cases} 10y + 5z = x \\ -x + 2y + 5z = y \\ 2y + z = z \\ V_2 \neq \mathbf{0} \end{cases}$ soit $\begin{cases} x = 5z \\ y = 0 \\ V_2 \neq \mathbf{0} \end{cases}$. $V_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ convient.

$V_3 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ_3 si et seulement si

$\begin{cases} AV_3 = \lambda_3 V_3 \\ V_3 \neq \mathbf{0} \end{cases}$, soit $\begin{cases} 10y + 5z = 2x \\ -x + 2y + 5z = 2y \\ 2y + z = 2z \\ V_3 \neq \mathbf{0} \end{cases}$ soit $\begin{cases} x = 5z \\ y = \frac{1}{2} z \\ V_3 \neq \mathbf{0} \end{cases}$. $V_3 = \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ convient.

Si $P = \begin{pmatrix} -8 & 5 & 10 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $A = PDP^{-1}$.

$A^n = PDP^{-1}\, PDP^{-1} \ldots\ldots PDP^{-1} = PD^n P^{-1}$ et $D^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$.

Exercice 9

On considère l'application linéaire f de $\mathbf{IR}^3$ dans $\mathbf{IR}^3$ définie par
$f(x, y, z) = (x + ky , y+tz , x + y + z)$, où k et t sont des paramètres réels.

1) Ecrire les matrices de f dans la base canonique, puis dans la base $b = \{ (1,1,1) , (1,1,0) , (1,0,0) \}$.

2) Etudier le rang de ces matrices suivant les valeurs de k et t.

3) On choisit k = 0 et t = 1. Déterminer kerf et en donner une base. f est-elle diagonalisable ? Si oui préciser la base dans laquelle f est représentée par une matrice diagonale et préciser cette matrice.

Solution

1) Par définition, f a pour matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ dans la base canonique.

Si B est la matrice de f dans **b**, $B = P^{-1}AP$, où P est la matrice de passage de la base canonique vers **b**. Et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. P^{-1} a pour colonnes les coordonnées des vecteurs de la base canonique dans **b**. Si $P^{-1} = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}$ et $v_1 = (1,1,1)$, $v_2 = (1,1,0)$ et $v_3 = (1,0,0)$,

$(1,0,0) = av_1 + bv_2 + cv_3 = (a + b +c , a + b , a)$, c'est à dire :

$$\begin{cases} 1 = a + b + c \\ 0 = a + b \\ 0 = a \end{cases}$$. D'où a = 0, b = 0 et c = 1.

De même $(0,1,0) = dv_1 + ev_2 + fv_3 = (d + e + f , d + e , d)$, c'est à dire :

$$\begin{cases} 0 = d + e + f \\ 1 = d + e \\ 0 = d \end{cases}$$. D'où d = 0, e = 1 et f = -1.

De même $(0,0,1) = gv_1 + hv_2 + iv_3 = (g + h + i , g + h , g)$, c'est à dire :

$\begin{cases} 0 = g + h + i \\ 0 = g + h \\ 1 = g \end{cases}$. D'où g = 1, h = -1 et i = 0. Donc $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ et

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ (t-2) & -1 & -1 \\ (k-t) & k & 1 \end{pmatrix}.$$

2) A et B sont de même rang puisqu'elles représentent la même application linéaire dans deux bases différentes.

$\text{dét}A = \begin{vmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + kt - t$. Si $1 + kt - t \neq 0$, A et B sont de rang 3 (= rang(f)).

Si $1 + kt - t = 0$, rangA ≤ 2. Or quelque soit la valeur de k, les deux première colonnes de A ne sont pas proportionnelles. A est donc de rang 2 et rangA = rangB = rang(f) = 2.

3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et d'après le résultat précédent rang(f) = 2 et dimkerf = 1 (théorème des dimensions). $v = (x,y,z) \in$ kerf si et seulement si $\begin{cases} x = 0 \\ y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$ soit $\begin{cases} x = 0 \\ y = -z \end{cases}$ et

$v = (0,y,-y) = y(0,1,-1)$. Donc kerf = <(0,1,-1)>. {(0,1,-1)} est une base de kerf.

D'après une remarque de la correction de l'exercice **8**, $\lambda_1 = 0$ est une valeur propre de f et $V_1 = (0,1,-1)$ est un vecteur propre de f associé à cette valeur propre. Cherchons les autres valeurs propres de f :

$P_A(\lambda) = \text{dét}(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)^3 - (1 - \lambda) = -\lambda (\lambda - 2)(\lambda - 1)$. D'après le cours, les valeurs propres de A sont les racines de $P_A(\lambda)$; A a donc trois valeurs propres distinctes, $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = 1$ et $\lambda_3 = 2$. A a trois valeurs propres distinctes donc A (ou f) est diagonalisable.

$V_2 = (x,y,z)$ est un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ_2 si et seulement si

$\begin{cases} f(V_2) = \lambda_2 V_2 \\ V_2 \neq \mathbf{0} \end{cases}$ (on note **0** le vecteur nul (0,0,0))soit $\begin{cases} x = x \\ y + z = y \\ x + y + z = z \\ V_2 \neq \mathbf{0} \end{cases}$ soit $\begin{cases} z = 0 \\ y = -x \\ V_2 \neq \mathbf{0} \end{cases}$.

$V_2 = (1,-1,0)$ convient.

$V_3 = (x,y,z)$ est un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ_3 si et seulement si

$\begin{cases} f(V_3) = \lambda_3 V_3 \\ V_3 \neq \mathbf{0} \end{cases}$, soit $\begin{cases} x = 2x \\ y + z = 2y \\ x + y + z = 2z \\ V_3 \neq (0,0,0) \end{cases}$ soit $\begin{cases} x = 0 \\ y = z \\ V_3 \neq \mathbf{0} \end{cases}$. $V_3 = (0,1,1)$ convient.

Si $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $A = PDP^{-1}$. D est la matrice de f dans la base $\{V_1, V_2, V_3\}$.

Exercice 10

1) Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que $P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$

2) Soit $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Déterminer les valeurs propres de J.

Montrer que J est diagonalisable. Montrer que $J = PD\,P^{-1}$, avec D diagonale que l'on explicitera.

3) Expliquer comment on peut calculer J^n (justifier les formules utilisées et ne pas faire le calcul explicite des produits matriciels).

4) Soient les suites (u_n), (v_n) et (w_n) vérifiant les relations de récurrence :

$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{2} v_n \\ v_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + w_n) \\ w_{n+1} = \frac{1}{2} v_n \end{cases}$. Expliquer le calcul de u_n, v_n et w_n en fonction de n, u_0, v_0 et w_0.

Etudier la convergence de ces suites.

Solution

1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. Donc $P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$.

2) $P_J(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 2\lambda = -\lambda(\lambda^2 - 2) = -\lambda(\lambda - \sqrt{2})(\lambda + \sqrt{2})$.

J a donc 3 valeurs propres distinctes (J est donc diagonalisable), $\lambda_1 = -\sqrt{2}$, $\lambda_2 = 0$ et $\lambda_3 = \sqrt{2}$. Pour montrer que $J = PDP^{-1}$, il suffit de montrer que les colonnes de P sont les coordonnées de vecteurs propres associés aux valeurs propres précédentes.

$J\begin{pmatrix}1\\-\sqrt{2}\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\sqrt{2}\\2\\-\sqrt{2}\end{pmatrix} = -\sqrt{2}\begin{pmatrix}1\\-\sqrt{2}\\1\end{pmatrix}$. Donc $\begin{pmatrix}1\\-\sqrt{2}\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur propre de J associé à la valeur propre $\lambda_1 = -\sqrt{2}$.

$J\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$. Donc $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur propre de J associé à la valeur propre $\lambda_2 = 0$.

$J\begin{pmatrix}1\\\sqrt{2}\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sqrt{2}\\2\\\sqrt{2}\end{pmatrix} = \sqrt{2}\begin{pmatrix}1\\\sqrt{2}\\1\end{pmatrix}$. Donc $\begin{pmatrix}1\\\sqrt{2}\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur propre de J associé à la valeur propre $\lambda_3 = \sqrt{2}$. Et $J = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix}-\sqrt{2} & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & \sqrt{2}\end{pmatrix}$.

3) $J^n = (PDP^{-1})^n = PDP^{-1}\, PDP^{-1} \ldots PDP^{-1} = PD^nP^{-1}$

$J^n = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\-\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2}\\1 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(-\sqrt{2})^n & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & (\sqrt{2})^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -\sqrt{2} & 1\\2 & 0 & -2\\1 & \sqrt{2} & 1\end{pmatrix}$.

4) Soit S $\begin{cases}u_{n+1} = \frac{1}{2}v_n\\ v_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + w_n)\\ w_{n+1} = \frac{1}{2}v_n\end{cases}$. Matriciellement S s'écrit $\begin{pmatrix}u_{n+1}\\v_{n+1}\\w_{n+1}\end{pmatrix} = \frac{1}{2}J\begin{pmatrix}u_n\\v_n\\w_n\end{pmatrix}$. En itérant cette dernière formule : $\begin{pmatrix}u_{n+1}\\v_{n+1}\\w_{n+1}\end{pmatrix} = (\frac{1}{2}J)^2\begin{pmatrix}u_{n-1}\\v_{n-1}\\w_{n-1}\end{pmatrix} = (\frac{1}{2}J)^3\begin{pmatrix}u_{n-2}\\v_{n-2}\\w_{n-2}\end{pmatrix} = \ldots = (\frac{1}{2}J)^{n+1}\begin{pmatrix}u_0\\v_0\\w_0\end{pmatrix}$. Ainsi, en décalant d'un rang : $\begin{pmatrix}u_n\\v_n\\w_n\end{pmatrix} = (\frac{1}{2}J)^n\begin{pmatrix}u_0\\v_0\\w_0\end{pmatrix}$. Donc, étant donnée la formule donnant J^n, dans les expressions de u_n; v_n et w_n il y a en général des combinaisons linéaires de $(-\frac{\sqrt{2}}{2})^n$ et $(\frac{\sqrt{2}}{2})^n$. Ces quantités tendent vers 0 en valeur absolue quand n tend vers l'infini. Donc u_n, v_n et w_n convergent.

Exercice 11

Soit $A = \begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\0 & 5 & -6\\0 & 3 & -4\end{pmatrix}$ et soit f l'application linéaire de $\mathbf{R}^3$ dans $\mathbf{R}^3$ ayant A pour matrice représentative dans la base canonique b.

1) Calculer $f(x, y, z)$ pour $(x, y, z)\in \mathbf{IR}^3$. f est-elle bijective ?

2) Chercher les valeurs propres de A et les vecteurs propres associés.

3) A est-elle diagonalisable ? (justifier). Si oui donner une matrice diagonale D (on ordonnera les valeurs propres par ordre croissant, de gauche à droite) semblable à A et la matrice de passage P correspondante telle que

$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Quelle est la relation qui lie A, D et P ?

4) Calculer A^n.

5) Soient les suites (u_n), (v_n) et (w_n) vérifiant les relations de récurrence :

$\begin{cases} u_{n+1} = 3\, u_n \\ v_{n+1} = 5\, v_n - 6\, w_n \\ w_{n+1} = 3\, v_n - 4\, w_n \\ u_0 = v_0 = 1 \text{ et } w_0 = -1 \end{cases}$. Pour $n\in \mathbf{N}$, calculer u_n, v_n et w_n en fonction de n.

Solution

1) D'après le cours $f(x,y,z) = (3x , 5y – 6z , 3y – 4z)$ (en effet $f(x, y,z)$ a pour coordonnées dans la base canonique $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$). Ici pour que f soit bijective, il suffit que f soit injective, c'est à dire que $\ker f = \{(0,0,0)\}$. En effet, dans ce cas, d'après le théorème des dimensions on a $\dim \mathrm{Im} f = 3 = \dim \mathbf{IR}^3$ et $\mathrm{Im} f = \mathbf{IR}^3$. Déterminons kerf.

$v = (x,y,z)\in \ker f$ si et seulement si $\begin{cases} 3x = 0 \\ 5y - 6z = 0 \\ 3\, y - 4z = 0 \end{cases}$, soit $x = y = z = 0$. f est donc bien injective et donc bijective d'après la remarque précédente.

2) Les valeurs propres de A sont les racines de $P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} (3-\lambda) & 0 & 0 \\ 0 & (5-\lambda) & -6 \\ 0 & 3 & (-4-\lambda) \end{vmatrix}$

$P_A(\lambda) = (3 - \lambda)(5-\lambda)(-4-\lambda) + 18(3-\lambda) = (3-\lambda)(\lambda+1)(\lambda-2)$.

A a donc 3 valeurs propres distinctes (A est donc diagonalisable): $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 2$ et $\lambda_3 = 3$.

$V_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à $\lambda_1 = -1$ si et seulement si $\begin{cases} AV_1 = \lambda_1 V_1 \\ V_1 \neq \mathbf{0} \end{cases}$ si on note $\mathbf{0}$ la matrice colonne nulle. D'où $\begin{cases} 3x = -x \\ 5y - 6z = -y \\ 3y - 4z = -z \\ V_1 \neq \mathbf{0} \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = 0 \\ y = z \\ V_1 \neq \mathbf{0} \end{cases}$. $V_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ y \end{pmatrix}$ avec $y \neq 0$.

$V_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à $\lambda_2 = 2$ si et seulement si $\begin{cases} AV_2 = \lambda_2 V_2 \\ V_2 \neq \mathbf{0} \end{cases}$. D'où

$$\begin{cases} 3x = 2x \\ 5y - 6z = 2y \\ 3y - 4z = 2z \\ V_2 \neq \mathbf{0} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 2z \\ V_2 \neq \mathbf{0} \end{cases}. \; V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2z \\ z \end{pmatrix} \text{ avec } z \neq 0.$$

$V_3 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à $\lambda_3 = 3$ si et seulement si $\begin{cases} AV_3 = \lambda_3 V_3 \\ V_3 \neq \mathbf{0} \end{cases}$. D'où

$$\begin{cases} 3x = 3x \\ 5y - 6z = 3y \\ 3y - 4z = 3z \\ V_3 \neq \mathbf{0} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x \neq 0 \\ y = z = 0 \end{cases}. \; V_3 = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ avec } x \neq 0.$$

3) Etant donné l'ordre imposé par l'énoncé $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & x \\ y & 2z & 0 \\ y & z & 0 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Donc x = 1, -y + 2z = 1 et 2y – z = 1. D'où x = y = z = 1 et $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. $A = PDP^{-1}$ avec

$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

4) $A^n = (PDP^{-1})^n = PDP^{-1}\, PDP^{-1} \ldots PDP^{-1} = PD^nP^{-1}$.

$$A^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^n & 0 & 0 \\ 0 & (2^{n+1} - (-1)^n) & (2(-1)^n - 2^{n+1}) \\ 1 & (2^n - (-1)^n) & (2(-1)^n - 2^n) \end{pmatrix}.$$

5) Soit S $\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{2} v_n \\ v_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + w_n) \\ w_{n+1} = \frac{1}{2} v_n \end{cases}$. Matriciellement S s'écrit $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$.En itérant cette dernière formule : $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = A^2 \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ v_{n-1} \\ w_{n-1} \end{pmatrix} = A^3 \begin{pmatrix} u_{n-2} \\ v_{n-2} \\ w_{n-2} \end{pmatrix} = \ldots = A^{n+1} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$. Ainsi,

en décalant d'un rang :

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^n & 0 & 0 \\ 0 & (2^{n+1} - (-1)^n) & (2(-1)^n - 2^{n+1}) \\ 1 & (2^n - (-1)^n) & (2(-1)^n - 2^n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^n \\ 2^{n+2} - 3(-1)^n \\ 2^{n+1} - 3(-1)^n \end{pmatrix}$$

Exercice 12

Soit $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1) Montrer que $J^2 = 2I + J$, où I désigne la matrice identité d'ordre 3.
En déduire J^{-1}.

2) Déterminer les valeurs propres de J. **Montrer** que J est diagonalisable.

Déterminer la matrice de passage P de première ligne (1 0 1) et telle que $P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

, et vérifiant $J = PD P^{-1}$, avec D diagonale (on ordonnera les valeurs propres par ordre croissant).

3) Calculer J^n (justifier les formules utilisées).

4) Soient les suites (u_n), (v_n) et (w_n) vérifiant les relations de récurrence :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{4}(v_n + w_n) \\ v_{n+1} = \frac{1}{4}(u_n + w_n) \\ w_{n+1} = \frac{1}{4}(u_n + v_n) \end{cases}$$

. Calculer u_n, v_n et w_n en fonction de u_0, v_0 et w_0.

Solution

1) $J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 2I_3 + J.$

Donc $I_3 = \frac{1}{2}(J^2 - J) = J\,[\frac{1}{2}(J - I_3)]$ et on en déduit que $J^{-1} = \frac{1}{2}(J - I_3) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

2) $P_J(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda + 2 = (\lambda + 1)(\lambda^2 - \lambda - 2) = -(\lambda + 1)^2(\lambda - 2).$

J a donc deux valeurs propres, $\lambda_1 = -1$, d'ordre de multiplicité 2 et $\lambda_2 = 2$.
Pour montrer que J est diagonalisable, il faut trouver une base de vecteurs propres de J.

$V_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de J associé à la valeur propre λ_1 si et seulement si

$\begin{cases} JV_1 = \lambda_1 V_1 \\ V_1 \neq \mathbf{0} \end{cases}$ (on note **0** la matrice colonne nulle), soit $\begin{cases} y + z = -x \\ x + z = -y \\ x + y = -z \\ V_1 \neq \mathbf{0} \end{cases}$ soit $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ V_1 \neq \mathbf{0} \end{cases}$.

$V_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -x - y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Ainsi $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $W_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ sont deux vecteurs propres de J indépendants et associés à la valeur propre λ_1. Tout vecteur propre de J associé à la valeur propre λ_1 est une combinaison linéaire de ces vecteurs.

$V_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de J associé à la valeur propre λ_2 si et seulement si

$\begin{cases} JV_2 = \lambda_2 V_2 \\ V_2 \neq \mathbf{0} \end{cases}$, soit $\begin{cases} y + z = 2x \\ x + z = 2y \\ x + y = 2z \\ V_2 \neq \mathbf{0} \end{cases}$ soit $\begin{cases} x = y = z \\ V_2 \neq \mathbf{0} \end{cases}$ et $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ convient.

$\{V_1, W_1, V_2\}$ est une base de $\mathbf{IR^3}$ formée de vecteurs propres de J (en effet $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$).

J est donc bien diagonalisable. Et $J = PDP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. On vérifie que $P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

3) $J^n = (PDP^{-1})^n = PDP^{-1}\, PDP^{-1} \ldots\, PDP^{-1} = PD^nP^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$J^n = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2(-1)^n + 2^n & (-1)^{n+1} + 2^n & (-1)^{n+1} + 2^n \\ (-1)^{n+1} + 2^n & 2(-1)^n + 2^n & (-1)^{n+1} + 2^n \\ (-1)^{n+1} + 2^n & (-1)^{n+1} + 2^n & 2(-1)^n + 2^n \end{pmatrix}$.

4) S $\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{4}(v_n + w_n) \\ v_{n+1} = \frac{1}{4}(u_n + w_n) \\ w_{n+1} = \frac{1}{4}(u_n + v_n) \end{cases}$. S s'écrit matriciellement s'écrit $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{4} J \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$.

En itérant cette dernière formule:

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = (\frac{1}{4} J)^2 \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ v_{n-1} \\ w_{n-1} \end{pmatrix} = (\frac{1}{4} J)^3 \begin{pmatrix} u_{n-2} \\ v_{n-2} \\ w_{n-2} \end{pmatrix} = \ldots = (\frac{1}{4} J)^{n+1} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$$ Ainsi, en décalant d'un rang :

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = (\frac{1}{4} J)^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = \frac{1}{3} (\frac{1}{4})^n \begin{pmatrix} 2(-1)^n + 2^n & (-1)^{n+1} + 2^n & (-1)^{n+1} + 2^n \\ (-1)^{n+1} + 2^n & 2(-1)^n + 2^n & (-1)^{n+1} + 2^n \\ (-1)^{n+1} + 2^n & (-1)^{n+1} + 2^n & 2(-1)^n + 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$$. Ainsi

$u_n = \frac{1}{3} (\frac{1}{4})^n [(2(-1)^n + 2^n)u_0 + ((-1)^{n+1} + 2^n) v_0 + ((-1)^{n+1} + 2^n) w_0]$,

$v_n = \frac{1}{3} (\frac{1}{4})^n [((-1)^{n+1} + 2^n)u_0 + (2(-1)^n + 2^n) v_0 + ((-1)^{n+1} + 2^n) w_0]$,

$w_n = \frac{1}{3} (\frac{1}{4})^n [((-1)^{n+1} + 2^n)u_0 + ((-1)^{n+1} + 2^n) v_0 + (2(-1)^n + 2^n) w_0]$.

On remarque que quelque soit u_0, v_0 et w_0, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \lim\limits_{n \to +\infty} w_n = 0$.

Exercice 13

On considère $\mathbf{IR}^3$ muni de la base canonique **b**.

1) Montrer que si **b'** = {(1, 1, 0) ; (1, 0, -1) ; (1, 1, 1)}, **b'** est aussi une base de $\mathbf{IR}^3$.

2) Un vecteur V de $\mathbf{IR}^3$ a pour coordonnées $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dans **b** et $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ dans **b'**. Donner la matrice P de passage de **b** à **b'** et la matrice P^{-1} de passage de **b'** à **b**. En déduire X en fonction de x', y' et z' et X' en fonction de x, y et z.

3) Soit f l'application linéaire de $\mathbf{IR}^3$ dans $\mathbf{IR}^3$ définie par :
f(x , y , z) = (4x - 5y + 4z , 4x - 5y + 4z , 3x - 3y + 3z). Déterminer la matrice de f dans **b** et puis la matrice de f dans **b'**.
Déterminer alors Imf et kerf ainsi que les vecteurs propres et les valeurs propres de f.

Solution

1) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$. Les vecteurs de **b'** sont donc 3 vecteurs indépendants de $\mathbf{IR}^3$, ils forment une base de $\mathbf{IR}^3$.

2) Par définition $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Les colonnes de P^{-1} sont les coordonnées des vecteurs de **b**

dans **b'**. Notons dans l'ordre, v_1, v_2 et v_3, les vecteurs de **b'**.

Si $(1,0,0) = av_1 + bv_2 + cv_3$, (1,0,0) a pour coordonnées $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ dans **b'**.

0r $(1,0,0) = av_1 + bv_2 + cv_3$ équivaut à $\begin{cases} 1 = a + b + c \\ 0 = a + c \\ 0 = -b + c \end{cases}$, d'où a = -1 et b = c = 1. La première colonne de P^{-1} est donc $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Si $(0,1,0) = av_1 + bv_2 + cv_3$, $\begin{cases} 0 = a + b + c \\ 1 = a + c \\ 0 = -b + c \end{cases}$, d'où a = 2 et b = c = -1. La deuxième colonne de P^{-1} est donc $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Si $(0,0,1) = av_1 + bv_2 + cv_3$, $\begin{cases} 0 = a + b + c \\ 0 = a + c \\ 1 = -b + c \end{cases}$, d'où a = -1 et b = 0 et c = 1. La troisième colonne de P^{-1} est donc $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

D'où $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. D'autre part d'après le cours $X = PX'$ et $X' = P^{-1}X$ donc

$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' + y' + z' \\ x' + z' \\ -y' + z' \end{pmatrix}$ et $X' = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x + 2y - z \\ x - y \\ x - y + z \end{pmatrix}$.

3) Par définition la matrice de f dans **b** est $A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 4 \\ 4 & -5 & 4 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ et celle de f dans **b'** est $B = P^{-1}AP$,

soit $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -5 & 4 \\ 4 & -5 & 4 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

B est très parlante en effet, on peut en déduire que $f(v_1) = -v_1$, $f(v_2) = (0,0,0)$ et $f(v_3) = 3v_3$. Ainsi f admet pour vecteurs propres les vecteurs de la base **b'** et les valeurs propres associées sont respectivement –1, 0 et 3. 0n en déduit aussi que $\ker f = \langle v_2 \rangle$ (c.f. la correction de l'exercice **8**) et $\mathrm{Im} f = \langle -v_1, 3v_3 \rangle = \langle v_1, v_3 \rangle$.