Leçon 05 – Cours : Matrices 2

Objectif:
On doit être capable de maîtriser la notion de matrice inverse et matrice de changement de base (définition et calcul). On aborde aussi la notion de diagonalisation dans le cadre le plus simple ou celle-ci est possible. Il faut aussi savoir montrer qu'une matrice n'est pas diagonalisable.
Cette leçon se place dans la continuité de la leçon 4 et joue le rôle d'outil pour d'autres matières. Elle sera approfondie dans le cadre du cours de L3 (Mathématiques 3).

1. Inversion de matrices

1.1. Définition de l'inverse d'une matrice carrée

On cherche s'il existe un inverse pour la multiplication des matrices.

Si A est une matrice carrée d'ordre n régulière (de rang n), il existe une et une seule matrice notée A^{-1} telle que : $A^{-1}.A = A.A^{-1} = I_n$, A^{-1} est la **matrice inverse** de A. Et si une matrice A d'ordre n est **inversible** (admet une matrice inverse), A est de rang n.

Ainsi par exemple si A et B sont deux matrices données d'ordre n et si X est une matrice d'ordre n vérifiant AX = B, on peut calculer X dès que A est inversible. En effet si on multiplie les 2 membres de l'inégalité précédente à gauche par A^{-1}, on obtient :
$A^{-1}AX = A^{-1}B$, soit $I_nX = A^{-1}B$ ou $X = A^{-1}B$.

Remarque : Une matrice carrée d'ordre n est **inversible** dès que son rang est égal à n, c'est à dire dès que son **déterminant est non nul.**

1.2. Propriétés de l'inverse d'une matrice carrée

*$(A.B)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$ (démonstration en exercice) ,

*$({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$.

1.3. Application aux systèmes linéaires

Un système linéaire de n d'équations à n inconnues $(x_1, .., x_n)$ s'écrit :

$$\begin{cases} a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + \ldots + a_{1n}\, x_n = u_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}\, x_2 + \ldots + a_{2n}\, x_n = u_2 \\ . \\ . \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}\, x_2 + \ldots + a_{nn}\, x_n = u_n \end{cases}$$

. On peut l'écrire matriciellement sous la forme :

$$A.X = U,$$

avec $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & a_{nn} \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$ et $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ . \\ u_n \end{pmatrix}$.

Et si A est inversible, on obtient une solution unique en multipliant les 2 membres de l'égalité AX = U à gauche par A^{-1}. Ainsi $X = A^{-1}U$

1.4. Calcul de l'inverse d'une matrice régulière :

On ne donnera pas ici de méthode systématique de calcul de l'inverse d'une matrice. Ce calcul est souvent fastidieux et est souvent faisable à l'aide d'une simple calculette. Ainsi, ce calcul sera donné à l'examen si les calculettes sont interdites, ou une méthode sera suggérée (c.f. exercez-vous ***2***).

2. Changement de bases

On a vu qu'une même application linéaire f, peut être représentée par des matrices différentes suivant les bases choisies. De telles matrices sont alors dites **équivalentes**. Des matrices équivalentes ont évidemment **même rang**, celui de l'application linéaire qu'elles représentent.

Dans les paragraphes qui suivent, on considère les applications linéaires de l'espace vectoriel **E** dans lui-même. Les matrices de telles applications linéaires sont alors carrées. Et on supposera **E** muni de la même base au départ et à l'arrivée.

Dans le cas particulier où les bases au départ et à l'arrivée sont les mêmes les matrices équivalentes sont dites **semblables.**

Nous allons essayer de voir comment on peut passer d'une matrice semblable à une autre.

2.1. Matrices de changement de bases :

Soit V, un vecteur d'un espace vectoriel réel **E** de dimension n et deux bases **b** et **b**' de **E**.
b = $\{e_1, \dots, e_n\}$, **b**' = $\{e'_1, \dots, e'_n\}$.

Supposons que l'on ait : $e'_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ij}\, e_i$ (1), c'est à dire que dans **b**, le vecteur colonne des coordonnées de e'_j est $\begin{pmatrix} p_{1j} \\ p_{2j} \\ . \\ p_{nj} \end{pmatrix}$.

V s'écrit de deux manières différentes dans **b** et dans **b**'.

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$ le vecteur colonne des coordonnées de V dans **b** et $X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ . \\ . \\ x'_n \end{pmatrix}$ celui des coordonnées de V dans **b**'. Cherchons une relation entre X et X'.

Donc $V = \sum_{j=1}^{n} x'_j\, e'_j$, soit en utilisant (1), $V = \sum_{j=1}^{n} x'_j \left(\sum_{i=1}^{n} p_{ij}\, e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} p_{ij}\, x'_j\right) e_i$.

Or $V = \sum_{i=1}^{n} x_i\, e_i$. Les coordonnées dans une même base sont uniques donc :

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}\, x'_j \quad \text{pour } i=1, 2, \dots, n.$$

Ce qui peut s'écrire matriciellement :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & . & . & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & . & . & p_{2n} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ p_{n1} & p_{n2} & . & . & p_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ . \\ . \\ x'_n \end{pmatrix} = PX'.$$

Si P est la matrice formée des coordonnées des vecteurs de la nouvelle base **b’** dans l'ancienne base **b**. P est la matrice de passage de **b** à **b’**.

Si P est la matrice de passage de la base **b** à la base **b’** (les colonnes de P sont les coordonnées des vecteurs de **b'** dans **b**), si X est la matrice colonne des coordonnées d'un vecteur V dans **b** et si X' est celle des coordonnées de ce même vecteur dans **b**’: X = PX'.

Remarque importante :
P est une matrice régulière c'est à dire de rang n, puisque les vecteurs de b' sont libres.
Or $X = PX'$ équivaut à $P^{-1}X = (P^{-1}P)X'$. Soit $X' = P^{-1}X$. P^{-1} apparaît donc comme la matrice de passage de b’ à b.

On peut faire le schéma suivant pour mieux mémoriser le résultat précédent :

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] & E \\ b \arrow[r, dashed, "A"] \arrow[d, "P"'] & b \\ b' \arrow[r, dashed, "B"] & b' \arrow[u, "P^{-1}"'] \end{tikzcd}$$

2.2. Matrices semblables

Soit f une application linéaire de **E** dans **E**, **b** et **b’** deux bases de **E** et V un vecteur quelconque de **E**.

On note :

P la matrice de passage de **b** vers **b’** (1)
A la matrice de f dans **b** (au départ et à l'arrivée) (2)
X la matrice de V dans **b** (3)
Y la matrice de f(V) dans **b** (4)
B la matrice de f dans **b’** (au départ et à l'arrivée) (5)
X' la matrice de V dans **b’** (6)
Y' la matrice de f(V) dans **b’** (7).

D'après le cours

(2), (3) et (4) impliquent $Y = AX$ (8)
(5), (6) et (7) impliquent $Y' = BX'$ (9)
(1), (3) (4) (6) et (7) impliquent $X = PX'$ et $Y = PY'$,
Ou en multipliant à gauche par P^{-1} :
$P^{-1}X = X'$ et $P^{-1}Y = Y'$ (10).

(9) et (10) impliquent $P^{-1}Y = BP^{-1}X$, et en multipliant à gauche par P, on obtient
$(PP^{-1})Y = PBP^{-1}X$ soit
$Y = (PBP^{-1})X$ (11).

(8) et (11) sont vraies quelque soit X puisque V est quelconque, on en déduit donc

$$A = PBP^{-1}.$$

D'où le **résultat à retenir** :

Soit A la matrice d'une application linéaire f dans une base **b** de **E** et B la matrice de la même application linéaire dans une autre base **b'** de **E**. Si P est la matrice de passage de **b** vers **b'** (coordonnées des vecteurs de **b'** dans **b**) alors $\mathbf{A = PBP^{-1}}$.

Remarque : En multipliant la relation $A = PBP^{-1}$, à gauche par P^{-1} et à droite par P, on obtient $P^{-1}AP = (P^{-1}P)B(P^{-1}P)$, soit $B = P^{-1}AP$.

3. Produit de matrices par blocs

Ce paragraphe a un but très pratique qui permet de simplifier les calculs dans certains cas.

3.1. Exposé du principe

Soit A une matrice (n,p) et B une matrice (p,r).
On peut par exemple décomposer A en deux sous-matrices A_1 et A_2 ayant le même nombre de lignes que A et ayant respectivement p_1 et p_2 colonnes ($p_1+ p_2 = p$). On écrira symboliquement que : $A = (A_1\ A_2)$.

De même on peut décomposer B en deux sous-matrices B_1 et B_2 ayant le même nombre de colonnes que B et ayant p_1 et p_2 lignes respectivement.

On écrira alors : $B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}$ et pour faire le produit A.B, on pourra faire :

$(A_1\ A_2)\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} = A_1B_1 + A_2B_2$ étant donné les procédés pour calculer un tel produit.

On peut généraliser et décomposer deux matrices en plusieurs blocs (éventuellement plus de deux) cohérents (nombres de lignes et de colonnes compatibles avec les produits) avant de faire le produit :

$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & . & A_p \\ . & . & . & . \\ A_r & . & . & A_{r+p} \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & . & B_n \\ . & . & . & . \\ B_p & . & . & B_{p+n} \end{pmatrix}$ si A_1 a k colonnes, B_1 a k lignes etc…

et $A.B = \begin{pmatrix} A_1.B_1+\ldots+A_p.B_p & . & . \\ . & . & . \\ . & . & A_r.B_n+\ldots+A_{r+p}.B_{p+n} \end{pmatrix}$.

3.2. Application

Ce procédé peut servir pour calculer plus simplement des produits de matrices, surtout lorsqu'il y a des zéros. Une application en sera donnée dans le cours de L3 avec les blocs de Jordan. On peut aussi l'utiliser pour inverser une matrice (n,n).

Si $A = \begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix}$ avec P de format (p,p) et S de format (s,s) (n=p+s). Q et R ne sont en général pas carrées Q est de format (n-s,n-p) et R (n-p,n-s).

Posons $A^{-1} = \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & T \end{pmatrix}$ X et de format (p,p) et T (s,s) et vérifient:

$$\begin{cases} P.X + QZ = I_p \\ P.Y + Q.T = \mathbf{0} \\ X.R + Z.S = \mathbf{0} \\ R.Y + S.T = I_s \end{cases}$$ (**0** désignant la matrice nulle de format convenable)

On est donc ramené à résoudre ce système de matrices inconnues X, Y, Z et T. Ce qui dans certains cas donne des calculs simples. (En effet on peut remarquer que si Q et R sont des matrices nulles $X = P^{-1}$, $Y = \mathbf{0}$, $Z = \mathbf{0}$ et $T = S^{-1}$ et $A^{-1} = \begin{pmatrix} P^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & S^{-1} \end{pmatrix}$.

4. Diagonalisation d'une matrice

4.1. Définitions

La **diagonalisation** d'une matrice est un outil très important du calcul matriciel, elle permet entre autre, d'élever facilement une matrice à une puissance.

Soit f une application linéaire de **E** dans **E** et A sa matrice dans une base **b** et Id l'application identique sur **E** (pour tout v de **E** Id(v) = v), de matrice $\mathbf{I}_n$.

Diagonaliser la matrice A, c'est trouver, quand c'est possible, une base de **E** dans laquelle f est représentée par une matrice diagonale D.

Si **p** = $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ est la base dans laquelle la matrice de f est diagonale, $f(v_i) = \lambda_i v_i$ pour i = 1 , … , n et les λ_i sont les éléments de la diagonale de D .
Les vecteurs v_i sont alors dits **vecteurs propres** de f (ou de A) et chaque réel λ_i est appelé **valeur propre** associée à v_i. L'ensemble des valeurs propres λ_i s'appelle le **spectre** de A.

Remarque : **Un vecteur propre v_i n'est jamais nul** puisque **p** est une base de E, et si V_i est la matrice colonne des coordonnées de v_i dans la base **b** : $AV_i = \lambda_i V_i$.

Reprenons l'égalité $f(v_i) = \lambda_i v_i$ avec $v_i \neq \mathbf{0}$, elle s'écrit aussi $(f - \lambda_i Id)(v_i) = \mathbf{0}$. On en déduit donc qu'il existe un vecteur propre v_i associé à λ_i, si et seulement si
$Ker(f-\lambda_i Id) \neq \mathbf{0}$. Et d'après le théorème des dimensions, λ_i et v_i existent ssi
$rang(f-\lambda_i Id) < n$ (ou $rang(A-\lambda_i I_n) < n$ ou $(A-\lambda_i I_n)$ n'est pas inversible). C'est ainsi que l'on peut trouver les valeurs propres λ_i et les vecteurs propres v_i (ou V_i) de f (ou de A).
Donc λ_i est valeur propre de A si et seulement si $\det(A-\lambda_i I_n) = 0$.

$\det(A-\lambda I_n)$ est un polynôme de degré n appelé **polynôme caractéristique** de f (ou de A).

Les **valeurs propres** apparaissent donc comme **les racines du polynôme caractéristique** de degré n en λ : $P_A(\lambda) = \det(A-\lambda I_n)$.

D'autre part si P est la matrice de passage de **p** vers **b** (les colonnes de P sont donc les V_i) d'après le résultat du paragraphe **2.** :

$$A = PDP^{-1}.$$

Résultat à savoir :

Une matrice A est diagonalisable si et seulement si, il existe une base **p** de vecteurs propres $\{v_i\}$ vérifiant : $AV_i = \lambda_i V_i$ (V_i matrice colonne des coordonnées de v_i dans **b**, base de départ) et si P est la matrice de passage de **b** vers **p** (les colonnes de P sont les V_i): $A = PDP^{-1}$ et D est la matrice diagonale semblable à A, sa diagonale est formée des λ_i, valeurs propres de A.

Si A est la matrice d'une application linéaire f dans la base de départ **b**, D est celle de f dans la base **p**.

D'autre part les valeurs propres λ_i sont telles que $\text{rang}(A-\lambda_i I_n) < n$ (si n est l'ordre de A et I_n la matrice unité d'ordre n) elles sont donc les racines du polynôme caractéristique $P_A(\lambda) = \det(A-\lambda I_n)$.

Diagonaliser A revient à trouver les valeurs propres λ_i, c'est à dire D, et la matrice P, c'est à dire les V_i.

Exemple : Diagonaliser $A = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}$.

Solution

Pour simplifier les explications, supposons que A est la matrice d'une application f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Utilisons les mêmes notations que plus haut.

1ère étape : calcul des valeurs propres

Ce sont les racines du polynôme caractéristique $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} (-4-\lambda) & 3 \\ -6 & (5-\lambda) \end{vmatrix}$

$P_A(\lambda) = (-4-\lambda)(5-\lambda) + 18 = \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda + 1)(\lambda - 2)$.

A a donc deux valeurs propres distinctes $\lambda_1 = -1$ et $\lambda_2 = 2$.

2ème étape : recherche des vecteurs propres

• $V = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre $\lambda 1 = -1$ si et seulement si $AV = \lambda_1 V$, ce qui donne $\begin{pmatrix} -4x+3y \\ -6x+5y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$ soit $\begin{cases} -4x + 3y = -x \\ -6x + 5y = -y \end{cases}$ ou x = y et $V = \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Tous les vecteurs propres associés à λ_1 sont proportionnel à $V1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

• $V = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre $\lambda_2 = 2$ si et seulement si $AV = \lambda_2 V$, ce qui donne $\begin{pmatrix} -4x+3y \\ -6x+5y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$ soit $\begin{cases} -4x + 3y = 2x \\ -6x + 5y = 2y \end{cases}$ ou y = 2x et $V = \begin{pmatrix} x \\ 2x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Tous les vecteurs propres associés à λ_2 sont proportionnel à $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

3ème étape : réduction de A

D'après les calculs précédents $\{v_1 , v_2\}$ est une base de $\mathbf{IR}^2$ dans laquelle la matrice de f est la matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

La matrice de passage de la base canonique de $\mathbf{IR}^2$ vers $\{v_1 , v_2\}$ est $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ (par définition les colonnes de P sont les coordonnées de v1 et v2 dans la base canonique de $\mathbf{IR}^2$ c'est-à-dire V_1 et V_2).

On a : $A = PDP^{-1}$.

4.2. Méthode

Pour diagonaliser une matrice A, on commencera par chercher les valeurs propres en résolvant $\det(A-\lambda I_n) = 0$ (pour cette année n = 2 ou 3).
Ensuite pour chaque valeur propre λ_i, on déterminera les vecteurs propres v_i qui lui est associé (**attention un vecteur propre est toujours différent de 0**) en écrivant
$AV_i = \lambda_i V_i$ (V_i désignant la matrice colonne des coordonnées de v_i dans la base **b** de départ).
Cette équation a toujours une infinité de solutions. Si λ_i est une racine simple du polynôme caractéristique les solutions sont toutes proportionnelles.
On fera attention à mettre les vecteurs propres dans P dans le même ordre que les valeurs propres dans D (la $i^{\text{ème}}$ colonne de P représente les coordonnées d'un vecteur propre associé à la valeur propre situé sur la $i^{\text{ème}}$ colonne de D).

On peut montrer que, pour que A soit diagonalisable il faut que pour toute valeur propre λ_i, racine du polynôme caractéristique d'ordre de multiplicité $m(\lambda_i)$, $AV_i = \lambda_i V_i$ ait $m(\lambda_i)$ solutions (en V_i) indépendantes. Si on ne peut pas trouver $m(\lambda_i)$ solutions indépendantes, A n'est pas diagonalisable. On peut aussi montrer que **si A a n valeurs propres distinctes, A est diagonalisable** (c'est le cas de l'exemple précédent). Ces résultats seront justifiés dans une année ultérieure mais peuvent être utilisés dès à présent dans les exercices.

4.3. Application

Soit A une matrice diagonalisable et D une matrice diagonale semblable à A, telle que :
$A = PDP^{-1}$ (P matrice de passage de la base de départ vers la base des vecteurs propres de A).
Si on veut calculer A^n (produit de n matrices égales à A), on peut remarquer que :

$$\text{D est diagonale, } D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & . & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & . \\ . & . & . & . \\ . & . & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \text{donc } D^n = \begin{pmatrix} (\lambda_1)^n & 0 & . & . \\ 0 & (\lambda_2)^n & 0 & . \\ . & . & . & . \\ . & . & 0 & (\lambda_n)^n \end{pmatrix}$$

(D^n désigne le produit de n matrices égales à D)

Donc $A^n = PDP^{-1}PDP^{-1}P\ldots\ldots P^{-1}PDP^{-1}$. Or $P^{-1}P = I_n$ et $I_nD = D$.
D'où $A^n = PD^nP^{-1}$, ce qui rend le calcul de A^n possible simplement.

Remarque :

Si A = $\begin{pmatrix} A_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_2 \end{pmatrix}$, où A_1 et A_2 sont des matrices carrées. Diagonaliser A revient à diagonaliser A_1 et A_2 d'après le paragraphe précédent.

En effet si $A_1 = P_1D_1P_1^{-1}$ et si $A_2 = P_2A_2P_2^{-1}$,

$A = PDP^{-1}$ avec P = $\begin{pmatrix} P_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & P_2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} D_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & D_2 \end{pmatrix}$ ($P^{-1} = \begin{pmatrix} P_1^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & P_2^{-1} \end{pmatrix}$) .

On peut évidement généraliser à 3,4 … matrices carrées (ces matrices n'étant pas nécessairement de même ordre) sur la diagonale et des zéros ailleurs.

Exercices

Exercice 1

Parmi les matrices suivantes, lesquelles sont inversibles :

$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$ $\quad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 2

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 6 & -6 \\ -2 & 7 & -6 \\ -1 & 4 & -4 \end{pmatrix}$. Vérifier que $A^3 - 2A^2 - A + 2I_3 = 0$ et en déduire A^{-1}.

Exercice 3

Résoudre $\begin{cases} 8x+5y = a \\ 5x+3y = b \end{cases}$, en déduire l'inverse de $B = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$.

Résoudre enfin $BX = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$.

Exercice 4

1) Soient dans la base canonique b de $\mathbb{R}^3$, les vecteurs v de matrice $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, w de matrice $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$, et l'application linéaire f de matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On considère les trois les vecteurs v_1 de matrice $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, v_2 de matrice $V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et v_3 de matrice $V_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Montrer que $\{v_1 , v_2 , v_3\}$ forment une base b' de R^3 et écrire les matrices de v et w dans b'.
Donner la matrice de f dans b'.

2) Soit g l'application linéaire qui a pour matrice A dans b', donner la matrice de g dans b.

Exercice 5

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ où $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,

$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $M_1 = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1) Indiquer toutes les façons de choisir la division de M_1 en quatre blocs pour effectuer, par blocs, le produit $M.M_1$ avec les blocs A, B, C et D.
2) Parmi les résultats de la question précédente, retenir celui où A_1 est une matrice colonne et effectuer le produit $M.M_1$.

Exercice 6

Inverser par blocs, la matrice : $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$, en utilisant

$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 7

Soit $J = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & J_2 & 0 & . & 0 \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & J_k \end{pmatrix}$ avec $J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}$.

En remarquant que $J_i = \lambda_i I + N$ et en calculant N^2, N^3 … , calculer J_i^n , puis J^n.

Exercice 8

Déterminer les valeurs propres puis les vecteurs propres de A dans les cas suivants. Puis diagonaliser A et expliquer le calcul de A^n (le calcul de l'inverse des matrices de passage n'est pas demandé) :

1) $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}$ 2) $A = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 5 \\ -1 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 9

On considère l'application linéaire f de IR^3 dans IR^3 définie par
f(x, y, z) = (x + ky , y+tz , x + y + z), où k et t sont des paramètres réels.

1) Écrire les matrices de f dans la base canonique, puis dans la base b = { (1,1,1) , (1,1,0) , (1,0,0) }.
2) Étudier le rang de ces matrices suivant les valeurs de k et t.
3) On choisit k = 0 et t = 1. Déterminer kerf et en donner une base. f est-elle diagonalisable ? Si oui préciser la base dans laquelle f est représentée par une matrice diagonale et préciser cette matrice.

Exercice 10

1) Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que $P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$

2) Soit $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Déterminer les valeurs propres de J.

Montrer que J est diagonalisable. Montrer que $J = PD\,P^{-1}$, avec D diagonale que l'on explicitera.

3) Expliquer comment on peut calculer J^n (justifier les formules utilisées et ne pas faire le calcul explicite des produits matriciels).

4) Soient les suites (u_n), (v_n) et (w_n) vérifiant les relations de récurrence :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{2} v_n \\ v_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + w_n) \\ w_{n+1} = \frac{1}{2} v_n \end{cases}$$

. Expliquer le calcul de u_n, v_n et w_n en fonction de n, u_0, v_0 et w_0.

Etudier la convergence de ces suites.

Exercice 11

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -6 \\ 0 & 3 & -4 \end{pmatrix}$ et soit f l'application linéaire de IR^3 dans IR^3 ayant A pour matrice représentative dans la base canonique b.

1) Calculer f(x, y, z) pour $(x, y, z) \in IR^3$. f est-elle bijective ?

2) Chercher les valeurs propres de A et les vecteurs propres associés.

3) A est-elle diagonalisable ? (justifier). Si oui donner une matrice diagonale D (on ordonnera les valeurs propres par ordre croissant, de gauche à droite) semblable à A et la matrice de passage P correspondante telle que

$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Quelle est la relation qui lie A, D et P ?

4) Calculer A^n.

5) Soient les suites (u_n), (v_n) et (w_n) vérifiant les relations de récurrence :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 3\, u_n \\ v_{n+1} = 5\, v_n - 6\, w_n \\ w_{n+1} = 3\, v_n - 4\, w_n \\ u_0 = v_0 = 1 \text{ et } w_0 = -1 \end{cases}$$

. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer u_n, v_n et w_n en fonction de n.

Exercice 12

Soit $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1) Montrer que $J^2 = 2I + J$, où I désigne la matrice identité d'ordre 3.
En déduire J^{-1}.

2) Déterminer les valeurs propres de J. Montrer que J est diagonalisable.

Déterminer la matrice de passage P de première ligne (1 0 1) et telle que $P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

, et vérifiant $J = PD\,P^{-1}$, avec D diagonale (on ordonnera les valeurs propres par ordre croissant).

3) Calculer J^n (justifier les formules utilisées).

4) Soient les suites (u_n), (v_n) et (w_n) vérifiant les relations de récurrence :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{4}(v_n + w_n) \\ v_{n+1} = \frac{1}{4}(u_n + w_n) \\ w_{n+1} = \frac{1}{4}(u_n + v_n) \end{cases}$$

. Calculer u_n, v_n et w_n en fonction de u_0, v_0 et w_0.

Exercice 13

On considère IR^3 muni de la base canonique b.
1) Montrer que si b' = {(1, 1, 0) , (1, 0, -1) , (1, 1, 1)}, b' est aussi une base de IR^3.

2) Un vecteur V de IR^3 a pour coordonnées $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dans b et $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ dans b'. Donner la matrice P de passage de b à b' et la matrice P^{-1} de passage de b' à b. En déduire X en fonction de x', y' et z' et X' en fonction de x, y et z.

3) Soit f l'application linéaire de IR^3 dans IR^3 définie par :
f(x , y , z) = (4x - 5y + 4z , 4x - 5y + 4z , 3x - 3y + 3z). Déterminer la matrice de f dans b et puis la matrice de f dans b'.
Déterminer alors Imf et kerf ainsi que les vecteurs propres et les valeurs propres de f.