Leçon 04 – Correction des "Exercez-vous"

Exercez vous 4
Démontrer la
Propriété *: L'ensemble des matrices de format (p, n) muni des deux opérations définies plus haut, est un espace vectoriel sur* ***R***.

Solution

Montrons que tous les axiomes d'un espace vectoriel sont vérifiés :

Si A, B et C sont des matrices de M(p,n) telles que $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ et $C = (c_{ij})$:

$A + B = (a_{ij} + b_{ij}) = (b_{ij} + a_{ij}) = B + A$

$A + (B + C) = (a_{ij}) + (b_{ij} + c_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij} + c_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij} = (A + B) + C$

$A + \mathbf{0} = \mathbf{0} + A = A$ (avec **0**, matrice de M(p,n) ne comprenant que des zéros)

Si $(-A) = (-a_{ij})$, $A + (-A) = (-A) + A = \mathbf{0}$.

Si λ et μ sont des éléments de **R** :

$(\lambda+\mu)A = ((\lambda+\mu)a_{ij}) = (\lambda a_{ij} + \mu a_{ij}) = \lambda A + \mu A$

$\lambda(A + B) = (\lambda(a_{ij}+b_{ij})) = (\lambda a_{ij} + \lambda a_{ij}) = (\lambda a_{ij}) + (\lambda a_{ij}) = \lambda A + \lambda B$

$(\lambda\mu)A = (\lambda\mu a_{ij}) = \lambda(\mu a_{ij}) = \lambda(\mu A)$

$1.A = A.1 = A.$

Et M(p,n) est bien un espace vectoriel sur **R**.