Leçon 04 – Correction des "Exercez-vous"

Exercez vous 1

1) Soit f : $\mathbf{IR}^3 \to \mathbf{IR}^2$, telle que f(x, y, z) = (2x-y+z, x+y-z).

a)Donner la matrice A de f dans les bases canoniques **b** et **c** de $\mathbf{IR}^3$ et $\mathbf{IR}^2$ respectivement.

b) Donner la matrice A_1 de f dans **b** et $\mathbf{c}_1 = \{(1,1), (-1,1)\}$.

2) Soit g, une application linéaire de $\mathbf{IR}^2$ dans $\mathbf{IR}^3$ dont la matrice dans **c** et **b** est

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a)Calculer g(x, y).

b) Donner la matrice B_1 de g dans $\mathbf{c}_1$ et **b**.

Solution

1) a) f(1,0,0) = (2,1) et les coordonnées de (2,1) dans **c** sont $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

f(0,1,0) = (-1,1) et les coordonnés de (-1,1) dans **c** sont $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

f(0,0,1) = (1,-1) et les coordonnés de (1,-1) dans **c** sont $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, d'où

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

1) b) f(1,0,0) = (2,1) = x(1,1) + y(-1,1). D'où (2,1) = (x-y,x+y) ; x-y = 2 et x+y = 1.

Soit, $x = \frac{3}{2}$ et $y = -\frac{1}{2}$. Les coordonnées de (2,1) dans $\mathbf{c}_1$ sont donc $\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

De même f(0,1,0) = (-1,1), de coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans $\mathbf{c}_1$.

Et f(0,0,1) = (1,-1) = -(-1,1) , de coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ dans $\mathbf{c}_1$.

$$\text{D'où } A_1 = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

2) a) Puisque g est linéaire, $g(x,y) = xg(1,0) + yg(0,1) = x(2,0,-1) + y(-1,1,0)$ (étant donnée B). Soit $g(x,y) = (2x-y,y,-x)$.

2) b) $g(1,1) = (1,1,-1)$ de coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ dans **b** et $g(-1,1) = (-3,1,1)$ de coordonnées $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans **b**. D'où $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.