Leçon 04 – Exercices

Rappel : Formule du binôme de Newton. Si a et b commutent:

$(a + b)^n = a^n + C_n^1\, a^{n-1}b + ...+ C_n^k\, a^{n-k}b^k + ...+ b^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, a^{n-k}b^k$.

Exercice 1

Calculer $4\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 8 & 1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 2

On appelle matrice stochastique suivant les lignes, une matrice dont les coefficients sont des réels positifs ou nuls, et tels que leur somme sur chaque ligne égale 1. On définit de même une matrice stochastique suivant les colonnes.

Construire une matrice stochastique d'ordre 4 suivant les lignes **et** les colonnes.

Exercice 3

Trouver deux matrices X et Y telles que : $\begin{cases} X - Y = A \\ 2X + Y = B \end{cases}$

avec $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 4

Si $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ calculer $(A + B)^2$ et $A^2 + 2A.B + B^2$. Expliquer la différence des résultats.

Exercice 5

Soit f définie sur $\mathbb{R}^4$ par $f(x, y, z, t) = (2x - y + t\ ,\ 3z\ ,\ 2y + z - t)$.

1) Donner la matrice de f dans **b** = {(1,1,0,0) ; (0,1,0,-1) ; (1,1,1,0) ; (0,0,0,1)} et la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

2) Soit g l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ ayant pour matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ dans la base canonique. Donner la matrice de $g \circ f$ dans **b** et la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 6

Effectuer les produits de matrices suivants :

1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; 3) Soit $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ calculer A^3

4) $\begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$; 5)Soit $X = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, calculer X^n ($n \in \mathbf{N}^*$).

Exercice 7

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ écrire toutes les matrices qui commutent avec A.

Exercice 8

1) Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ trouver une matrice X non nulle telle que A.X = **O** et une matrice Y telle que Y.A = **O** (où **O** est la matrice nulle d'ordre 2).

2) Trouver une matrice B non nulle d'ordre 2 telle que B^2 = **O**.

Exercice 9

Montrer que si A et B sont des matrices carrées d'ordre n : tr(AB) = tr(BA).

Exercice 10

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. En posant $A = B + 2I_2$, calculer B^2. Calculer A^n (remarquer que B et $2I_2$ commutent et donc que la formule du binôme de Newton s'applique).

Exercice 11

Soit $N = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, calculer N^n. En déduire un moyen de calculer A^n, si

$A = \begin{pmatrix} -3 & a & b \\ 0 & -3 & c \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$. (On remarquera que $-3I_3$ et N commutent).

Exercice 12

Déterminer le rang des matrices suivantes :

1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.