Leçon 04 – Correction des exercices

Exercice 1

Calculer $4\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 8 & 1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

Solution

D'après le cours on obtient $\begin{pmatrix} 8 & -4 & 0 \\ 12 & 32 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 & 6 \\ 3 & -6 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -4 & 6 \\ 15 & 24 & 4 \end{pmatrix}$.

Exercice 2

On appelle matrice stochastique suivant les lignes, une matrice dont les coefficients sont des réels positifs ou nuls, et tels que leur somme sur chaque ligne égale 1. On définit de même une matrice stochastique suivant les colonnes.

Construire une matrice stochastique d'ordre 4 suivant les lignes **et** les colonnes.

Solution

Une solution non triviale est donnée par $\begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6 & 0.4 \\ 0.25 & 0.25 & 0.4 & 0.1 \\ 0.25 & 0.25 & 0 & 0.5 \end{pmatrix}$.

Exercice 3

Trouver deux matrices X et Y telles que : $\begin{cases} X - Y = A \\ 2X + Y = B \end{cases}$

avec $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Solution

Les propriétés de l'addition et de la multiplication sont les mêmes que dans **IR** donc on peut écrire $\begin{cases} 3X = A + B \\ Y = X - A \end{cases}$ soit $\begin{cases} X = \frac{1}{3}(A + B) \\ Y = \frac{1}{3}(B - 2A) \end{cases}$. Et en remplaçant A et B par leur valeur :

$X = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} -2 & \frac{-1}{3} \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 4

Si $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ calculer $(A + B)^2$ et $A^2 + 2A.B + B^2$. Expliquer la différence des résultats.

Solution

$$(A + B)^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 7 & 12 \\ -6 & 7 \end{pmatrix}$$

$$A^2 + 2AB + B^2 = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -8 & -1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 16 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 7 & 12 \\ -6 & 7 \end{pmatrix}.$$

$(A + B)^2 = (A + B)(A + B) = A^2 + AB + BA + B^2$. Or la multiplication des matrices n'étant pas commutative, $AB \neq BA$ et $(A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$.

Exercice 5

Soit f définie sur $\mathbf{IR}^4$ par $f(x, y, z, t) = (2x - y + t , 3z , 2y + z - t)$.

1) Donner la matrice de f dans $\mathbf{b} = \{(1,1,0,0) ; (0,1,0,-1) ; (1,1,1,0) ; (0,0,0,1)\}$ et la base canonique de $\mathbf{IR}^3$.

2) Soit g l'application linéaire de $\mathbf{IR}^3$ dans $\mathbf{IR}^3$ ayant pour matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ dans la base canonique. Donner la matrice de g o f dans **b** et la base canonique de $\mathbf{IR}^3$.

Solution

1) Si on note A cette matrice, les colonnes de A sont les coordonnées des images des vecteurs de **b** par f dans la base canonique.
Or $f(1,1,0,0) = (1,0,2)$, $f(0,1,0,-1) = (-2,0,3)$, $f(1,1,1,0) = (1,3,3)$ et $f(0,0,0,1) = (1,,0,-1)$. Ces trois vecteurs ont respectivement pour coordonnées dans la base canonique :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}. \text{ D'où } A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

2) Par définition du produit matriciel, la matrice de gof est

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 6 & 2 & 17 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6

Effectuer les produits de matrices suivants :

1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; 3) Soit A = $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ calculer A^3

4) $\begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$; 5)Soit X = $\begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, calculer X^n ($n \in \mathbf{N}^*$).

Solution

1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 7 & -2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$.

2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 4 \\ -6 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

3) $A^2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$ et $A^3 = A^2 \times A = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 & 6 \\ 12 & -4 \end{pmatrix}$.

4) $\begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 25 \\ -3 & -4 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 119 & 10 \\ 36 & -6 \end{pmatrix}$.

5) $X^2 = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2x & (1+2)x^2 \\ 0 & 1 & 2x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$X^3 = X^2X = \begin{pmatrix} 1 & 2x & (1+2)x^2 \\ 0 & 1 & 2x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3x & (1+2+3)x^2 \\ 0 & 1 & 3x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Montrons alors par récurrence que $X^n = \begin{pmatrix} 1 & nx & (1+\ldots+n)x^2 \\ 0 & 1 & nx \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & nx & \frac{n(n+1)}{2}x^2 \\ 0 & 1 & nx \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

($1 + 2 + \ldots.n = \frac{n(n+1)}{2}$).

Cette propriété est vraie au rang 1, 2 et 3.

Supposons la propriété vraie au rang n et montrons qu'elle est vraie au rang n + 1.

$X^{n+1} = X^n X = \begin{pmatrix} 1 & nx & \frac{n(n+1)}{2}x^2 \\ 0 & 1 & nx \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & (n+1)x & [(n+1) + \frac{n(n+1)}{2}]x^2 \\ 0 & 1 & (n+1)x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} 1 & (n+1)x & \frac{(n+1)(n+2)}{2}]x^2 \\ 0 & 1 & (n+1)x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et la propriété est bien vérifiée au rang n + 1. D'après les axiomes du raisonnement par récurrence, on en déduit que la propriété est vraie quel que soit n.

Exercice 7

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ écrire toutes les matrices qui commutent avec A.

Solution

Remarquons tout d'abord que si la matrice commute avec A, nécessairement X est de format (2,2). En effet si AX est possible, X a deux lignes et si XA est possible, X a deux colonnes.

Posons $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$. Si AX = XA, $\begin{pmatrix} -x_1 & -x_2 \\ (3x_1+x_3) & (3x_2+x_4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-x_1+3x_2) & x_2 \\ (-x_3+3x_4) & x_4 \end{pmatrix}$, soit

$\begin{cases} -x_1 = -x_1 + 3x_2 \\ 3x_1 + x_3 = -x_3 + 3x_4 \\ -x_2 = x_2 \\ 3x_2 + x_4 = x_4 \end{cases}$. D'où $\begin{cases} x_2 = 0 \\ 3x_1 + 2x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ x_3 & (x_1 + \frac{2}{3}x_3) \end{pmatrix}$.

Exercice 8

1) Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ trouver une matrice X non nulle telle que A.X = **O** et une matrice Y telle que Y.A = **O** (où **O** est la matrice nulle d'ordre 2).

2) Trouver une matrice B non nulle d'ordre 2 telle que B^2 = **O**.

Solution

1) Si **0** et A sont carrées est d'ordre 2, X et Y sont nécessairement carrées d'ordre 2.

Posons $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$, alors si AX = **0**, $\begin{pmatrix} (-x_1+2x_3) & (-x_2+2x_4) \\ (x_1-2x_3) & (x_2-2x_4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, soit $\begin{cases} -x_1 + 2x_3 = 0 \\ -x_2 + 2x_4 = 0 \end{cases}$.

Une solution non triviale est par exemple $x_1 = 2$, $x_3 = 1$, $x_2 = 2$ et $x_4 = 1$ et $X = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ convient.

Posons $Y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{pmatrix}$, alors si YA = **0**, $\begin{pmatrix} (-y_1+y_2) & (2y_1 - 2y_2) \\ (-y_3+y_4) & (2y_3 - 2y_4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, soit $\begin{cases} y_1 = y_2 \\ y_3 = y_4 \end{cases}$.

Une solution est par exemple $y_1 = y_2 = y_3 = y_4 = 1$ et $Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ convient.

2) Posons $B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}$, si B^2 = **0**, $\begin{pmatrix} (b_1^2+b_2b_3) & (b_1b_2+b_2b_4) \\ (b_1b_3+ b_4b_3) & (b_2b_3+b_4^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ soit $\begin{cases} b_1^2 + b_2b_3 = 0 \\ b_1b_2 + b_2b_4 = 0 \\ b_1b_3 + b_4b_3 = 0 \\ b_2b_3 + b_4^2 = 0 \end{cases}$

.

Choisissons $b_1 = 1$, on obtient alors $\begin{cases} b_2b_3 = -1 \\ b_2(1 + b_4) = 0 \\ b_3(1 + b_4) = 0 \\ b_2b_3 + b_4^2 = 0 \end{cases}$. $b_2 = 0$ n'est pas solution, donc nécessairement $b_4 = -1$ et on obtient alors $\begin{cases} b_1 = -1 \\ b_4 = -1 \\ b_2b_3 = -1 \end{cases}$ et $b_2 = 1$ et $b_3 = -1$ conviennent, une solution est alors $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 9

Montrer que si A et B sont des matrices carrées d'ordre n : tr(AB) = tr(BA).

Solution

tr(AB) est la somme des éléments diagonaux de AB. Si $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{jk})$, $AB = (c_{ik})$ et les éléments de la diagonale de AB sont les c_{ii}, $\mathrm{tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n} c_{ii}$. Or $c_{ii} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ji}$.

Donc $\mathrm{tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ji}$.

De même si $B = (b_{ki})$ et $A = (a_{ij})$ $BA = (c'_{kj})$ et $\mathrm{tr}(BA) = \sum_{j=1}^{n} c'_{jj}$. Or $c'_{jj} = \sum_{i=1}^{n} b_{ji}\, a_{ij}$.

Donc $\mathrm{tr}(BA) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} b_{ji}\, a_{ij}$. D'ou l'égalité de tr(AB) et tr(BA) puisque les signes "somme" peuvent s'intervertir et que les a_{ij} et b_{ji} commutent.

Exercice 10

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. En posant $A = B + 2I_2$, calculer B^2. Calculer A^n (remarquer que B et $2I_2$ commutent et donc que la formule du binôme de Newton s'applique).

Solution

Rappel de la formule du binôme de Newton :

Pour tous réels a et b, $(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, a^k b^{n-k}$.

$B = A - 2I_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ et $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Remarquons que B et $2I_2$ commutent (pour tout réel λ, λI_2 commute avec n'importe quelle matrice M puisque I_2 commute avec toutes les matrices et que $M(\lambda I_2) = \lambda(MI_2) = \lambda(I_2M) = (\lambda I_2)M$). On peut donc appliquer la formule du binôme de Newton valable dans **R** :

$A^n = (B + 2I_2)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, B^k(2I_2)^{n-k} = (2I_2)^n + nB(2I_2)^{n-1}$. En effet la formule s'arrête à ce terme car toutes les puissances de B supérieures ou égales à 2 sont nulles.

D'où $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} + n\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 \\ 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n + n2^{n-1} & n2^{n-1} \\ -n2^{n-1} & 2^n - n2^{n-1} \end{pmatrix}$.

Exercice 11

Soit $N = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, calculer N^n. En déduire un moyen de calculer A^n, si $A = \begin{pmatrix} -3 & a & b \\ 0 & -3 & c \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$. (On remarquera que $-3I_3$ et N commutent).

Solution

$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ac \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N^3 = N^2N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ac \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Donc pour tout entier $n \geq 3$ $N^n = 0$.

$A = N - 3I_3$. N et $-3I_3$ commutent (c.f. exercice précédent). La formule du binôme de Newton s'applique et $A^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k N^k(-3I_3)^{n-k} = (-3I_3)^n + nN(-3I_3)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} N^2 (-3I_3)^{n-2}$. En effet la formule s'arrête à ce terme car toutes les puissances de N supérieures ou égales à 3 sont nulles.

$$A^n = \begin{pmatrix} (-3)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-3)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-3)^n \end{pmatrix} + n(-3)^{n-1}\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{n(n-1)}{2}(-3)^{n-2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & ac \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A^n = \begin{pmatrix} (-3)^n & (an(-3)^{n-1}) & (ac\frac{n(n-1)}{2}(-3)^{n-2}) \\ 0 & (-3)^n & (cn(-3)^{n-1}) \\ 0 & 0 & (-3)^n \end{pmatrix}.$$

Exercice 12

Déterminer le rang des matrices suivantes :

1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Solution

1) $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$ donc $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ est de rang 2.

2) $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ donc $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ est de rang 3.

3) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0$ donc $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ est de rang ≤ 2. $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ne sont pas proportionnels,

ce sont les coordonnées de vecteurs libres, $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ est de rang 2.

4) Les premiers, troisième et quatrième vecteurs lignes de la matrice sont égaux donc

$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est de rang au plus 2. Les deux premiers vecteurs lignes ne sont pas

proportionnels, ils sont donc libres. Donc le rang de $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est 2.