Leçon 04 – Cours : Matrices 1

- -

Objectif : L'objectif de cette leçon est la maîtrise du calcul matriciel. Les deux leçons d'algèbre linéaire de L1 (Espaces vectoriels et Applications linéaires) sont des pré-requis indispensables.
Il faut bien maîtriser toutes les opérations sur les matrices définies dans ce chapitre et en connaître les propriétés. Les dernières définitions (transposée, matrice symétrique et trace) sont aussi des notions à savoir, elles seront utilisées dans le cours de L3 (Mathématiques 3).
Le calcul matriciel est un outil fondamental en Économie, Gestion et Statistiques.

1. Matrices et opérations

Toutes ces opérations doivent être parfaitement maîtrisées ainsi que leurs propriétés.

1.1. Rappels

On considère dans ce chapitre deux espaces vectoriels **E** et **F** définis sur **IR** de dimensions finies n et p respectivement. On supposera sauf indications contraires, **E** muni d'une base **b** et **F** d'une base **c** avec :
b = $\{e_1, \ldots, e_n\}$ et **c** = $\{f_1, \ldots, f_p\}$.

Dans le cours de Mathématiques 1 nous avons associé une matrice m(f) de format (p,n) à chaque application linéaire f de **E** muni d'une base **b** dans **F** muni d'une base **c** et inversement.
Si on note a_{ij} le coefficient de m(f) situé à la l'intersection de la $i^{ème}$ ligne et de la $j^{ème}$ colonne, on notera aussi m(f) = (a_{ij}).

1.2. Addition de deux matrices

De même que nous avons su définir la somme de deux applications ayant même ensemble de départ et même ensemble d'arrivée, nous pourrons définir la somme de deux matrices de même format (p,n) (même nombre p de lignes et même nombre n de colonnes).

Si f et g sont deux applications linéaires de **E** dans **F**, on définira :

$$m(f) + m(g) = m(f+g).$$

Or pour tout vecteur e_i de la base de **b** : $(f+g)(e_i) = f(e_i) + g(e_i)$ (définition de f+g). On en déduit que le $i^{ème}$ vecteur colonne de m(f) + m(g) est la somme des $i^{ème}$ vecteurs colonnes de m(f) et de m(g).

Ainsi:

Si A et B sont deux matrices (p,n) telles que :

$$A = (a_{ij}) \text{ et } B = (b_{ij}) \quad , \quad A + B = (a_{ij} + b_{ij}) \text{ , pour } 1 \leq i \leq p \text{ et } 1 \leq j \leq n.$$

1.3. Produit par un réel

On définira de même

$$\lambda m(f) = m(\lambda f) \text{ si } \lambda \in \mathbf{R}.$$

Or $(\lambda f)(e_i) = \lambda (f(e_i))$ (définition de λf). Donc les vecteurs colonnes de λ m(f) sont ceux de m(f) multipliés par λ.

Ainsi :

Si $A = (a_{ij})$ alors $\lambda A = (\lambda a_{ij})$ (tous les termes sont multipliés par λ).

Propriété : L'ensemble des matrices de format (p, n) muni des deux opérations définies plus haut, est un espace vectoriel sur **R**.

1.4. Produit de deux matrices – définition

1.4.1. Définition

Le produit de deux matrices est associé à la **composition** des deux applications linéaires représentées par ces matrices.

Mais on ne peut définir $g\circ f$ que si l'ensemble d'arrivée de f est l'ensemble de départ de g.

Supposons donc que f soit une application linéaire de l'espace vectoriel **E** dans l'espace vectoriel **F** et g, une application linéaire de **F** dans l'espace vectoriel **G** de dimension finie r sur **R** et muni d'une base **d**. On a vu dans le cours de Licence 1 qu'alors $g\circ f$ est une application linéaire de **E** dans **G**.

$m(f) = (b_{jk})$ est de format (p,n)
$m(g) = (a_{ij})$ est de format (r,p) et
$m(g\circ f) = (c_{ik})$ est de format (r,n).

$$\boxed{\text{On définit } m(g) \times m(f) = m(g\circ f) \text{ soit } (a_{ij}) \times (b_{jk}) = (c_{ik}).}$$

(La plupart du temps on omet le signe x, c'est la même convention que pour le produit dans **R**.)

Calculons c_{ik} en fonction des b_{jk} et des a_{ij} (la démonstration est un peu technique et peut être sautée en 1ère lecture mais **le résultat est à savoir**).

Soit $\mathbf{b} = \{e_1, \dots, e_n\}$, $\mathbf{c} = \{f_1, \dots, f_p\}$ et $\mathbf{d} = \{g_1, \dots, g_r\}$ les bases respectives de **E**, **F** et **G** dans lesquelles sont écrites m(f), m(g) et $m(g\circ f)$.

$f(e_k) = \sum_{j=1}^{p} b_{jk} f_j$ par définition de la représentation matricielle de f dans les bases **b** et **c**.

De même : $g(f_j) = \sum_{i=1}^{r} a_{ij} g_i$.

Donc $g\circ f(e_k) = g(\sum_{j=1}^{p} b_{jk} f_j) = \sum_{j=1}^{p} b_{jk}\, g(f_j) = \sum_{j=1}^{p} b_{jk} \sum_{i=1}^{r} a_{ij} g_i = \sum_{i=1}^{r} (\sum_{j=1}^{p} a_{ij} b_{jk})\, g_i$.

Or par définition de (c_{ik}), $g\circ f(e_k) = \sum_{i=1}^{r} c_{ik} g_i$, c'est le vecteur de la $k^{\text{ième}}$ colonne de $m(g\circ f)$ et sa $i^{\text{ième}}$ coordonnées est c_{ik}.

$$\boxed{\text{D'où } c_{ik} = \sum_{j=1}^{p} a_{ij} b_{jk}.}$$

Remarque :

1. La dernière formule n'est pas à apprendre par cœur, il faut bien comprendre comment elle est faîte pour pouvoir faire le calcul du produit de deux matrices. Il peut être utile au début d'utiliser une disposition commode comme suit :

$$\begin{array}{cc} & B \\ A & (AB) \end{array}$$

Ainsi le terme c_{ik} de AB se trouve à l'intersection de la $i^{\text{ème}}$ ligne de A et de la $k^{\text{ème}}$ colonne de B. Pour calculer c_{ik} il suffit de faire la somme les produits des termes de la ligne i et de la colonne k.

2. S'il est possible de calculer le produit AB des matrices A et B, si A et B ne sont pas carrées de même ordre, on ne pourra pas effectuer le produit BA. En effet pour calculer le produit BA, il faut que le nombre des colonnes de B soit égal au nombre des lignes de A.

Même si on peut calculer AB et BA, en général : $AB \neq BA$ $(g \circ f \neq f \circ g)$.

Attention : Le produit des matrices **n'est pas commutatif**.

1.4.2. Propriétés du produit matriciel :

Ces propriétés se déduisent de celles de la composition des applications :

* $A.(B.C) = (A.B).C$ (associativité) en effet : $h\circ(g\circ f) = (h\circ g)\circ f$,

* $A.(B + C) = A.B + A.C$ (distributivité par rapport à l'addition :
$h\circ(f+g) = h\circ f + h\circ g)$,

* $\mathbf{O}.A = \mathbf{O}'$ Si A est (n,p), **O** est (r,n) et **O'** est (r,p), **O** et **O'** n'ont que des 0 ,

* $A.\mathbf{O} = \mathbf{O}'$ Si A est (n,p) , **O** est (p,r) et **O'** est (n,r), **O** et **O'** n'ont que des 0 ,

* $I_n . A = A.I_p = A$, A est (n,p) et I_n désigne la matrice identité d'ordre n ayant des 1 sur la diagonale et des 0 ailleurs, par exemple:

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

I_n correspond à l'application identique $f : V \to V$ de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^n$, les bases de départ et d'arrivée étant les mêmes.

* **rang(AB) ≤ min(rangA, rangB)** (Rappel : rangA = rang(f) = dimf(E))

Démonstration :
Soit g et f les applications linéaires de matrices A et B dans les bases **b**, **c** et **d** de **E**, **F** et **G**. AB est donc celle de gof.

$f : \mathbf{E} \to \mathbf{F}$ et $g : \mathbf{F} \to \mathbf{G}$, rangA = dimg(**F**), rangB = dimf(**E**) et
rangAB = dim(gof)(E) = dim(g(f(E)))

On peut faire le schéma suivant :

$$\begin{tikzcd} & f(E)\subset F \arrow[dr, "g"] & \\ E \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "fog"] & & g(f(E)) = fog(E)\subset G \end{tikzcd}$$

Or $g(f(\mathbf{E})) \subset g(\mathbf{F})$ (en effet $f(\mathbf{E}) \subset \mathbf{F}$), donc $\dim g(f(\mathbf{E})) \leq \dim g(\mathbf{F})$.
De plus $\dim g(f(\mathbf{E})) \leq \dim f(\mathbf{E})$.
On obtient bien rang(AB) ≤ rangA et rang(AB) ≤ rangB , d'où le résultat.

1.5. Image d'un vecteur par une application linéaire et matrice

Propriété : Soit A = (a_{ij}) la matrice de l'application linéaire f de **E** muni de la base **b**, dans **F** muni de la base **c**. Si X est la matrice colonne des coordonnées du vecteur V de **E** dans la base **b** et Y celle des coordonnées de f(V) dans **c** : Y = AX.

Démonstration: Supposons **b** = $\{e_1 , \dots , e_n\}$ et **c** = $\{f_1 , \dots , f_p\}$

Si $V = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$.

D'autre part $f(V) = \sum_{j=1}^{n} x_j f(e_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j \left(\sum_{i=1}^{p} a_{ij} f_i\right) = \sum_{i=1}^{p} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\right) f_i$, donc la $i^{ième}$ ligne de Y, matrice colonne des coordonnées de f(V) dans **c** est : $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$, c'est aussi la $i^{ième}$ ligne de AX. D'où le résultat.

1.6. Transposition de matrices

Etant donné une matrice A, on appelle **transposée** de A et on note ${}^tA$, la matrice obtenue à partir de A en échangeant les lignes et les colonnes.
Si A est une matrice (p,n) , ${}^tA$ sera donc une matrice (n,p).

Remarque : Certains ouvrages notent A^T au lieu de ${}^tA$. Mais pour éviter la confusion avec l'élévation de A à la puissance T, nous utiliserons la notation ${}^tA$.

On obtient immédiatement les **propriétés** suivantes :

* ${}^t(A + B) = {}^tA + {}^tB$,
* ${}^t(A.B) = {}^tB.{}^tA$, Attention à l'ordre des termes!
* ${}^t({}^tA) = A$.

Définition : Une matrice qui vérifie ${}^tA = A$ est dite **symétrique**.

Si A = (a_{ij}) est symétrique, A est carrée et $a_{ij} = a_{ji}$.

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & 4 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ est symétrique d'ordre 3.

1.6. Trace d'une matrice carrée

1.6.1. Définition

On appelle **trace** de la matrice carrée A = (a_{ij}) d'ordre n, et on note trA, la somme de ses éléments diagonaux : $trA = \sum_{i=1}^{i=n} a_{ii}$.

1.6.2. Propriétés :

*$\mathrm{tr}(A+B) = \mathrm{tr}A + \mathrm{tr}B$ (c'est immédiat!) ,
*$\mathrm{tr}(\lambda A) = \lambda \mathrm{tr}A$ (c'est immédiat !) ,
*$\mathrm{tr}(A.B) = \mathrm{tr}(BA)$ (démonstration en exercice).

Exercices

Rappel : Formule du binôme de Newton. Si a et b commutent:

$(a + b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1}b + ...+ C_n^k a^{n-k}b^k + ...+ b^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k}b^k.$

Exercice 1

Calculer $4\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 8 & 1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 2

On appelle matrice stochastique suivant les lignes, une matrice dont les coefficients sont des réels positifs ou nuls, et tels que leur somme sur chaque ligne égale 1. On définit de même une matrice stochastique suivant les colonnes.
Construire une matrice stochastique d'ordre 4 suivant les lignes et les colonnes.

Exercice 3

Trouver deux matrices X et Y telles que : $\begin{cases} X - Y = A \\ 2X + Y = B \end{cases}$

avec $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 4

Si $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ calculer $(A + B)^2$ et $A^2 + 2A.B + B^2$. Expliquer la différence des résultats.

Exercice 5

Soit f définie sur IR^4 par f(x, y, z, t) = (2x - y + t , 3z , 2y + z - t).
1) Donner la matrice de f dans b = {(1,1,0,0) , (0,1,0,-1) , (1,1,1,0) , (0,0,0,1)} et la base canonique de IR^3.

2) Soit g l'application linéaire de IR^3 dans IR^3 ayant pour matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ dans la base canonique. Donner la matrice de $g \circ f$ dans b et la base canonique de IR^3.

Exercice 6

Effectuer les produits de matrices suivants :

1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, 2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 3) Soit $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ calculer A^3

4) $\begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$, 5)Soit $X = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, calculer X^n $(n \in \mathbb{N}^*)$.

Exercice 7

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ écrire toutes les matrices qui commutent avec A.

Exercice 8

1) Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ trouver une matrice X non nulle telle que A.X = O et une matrice Y telle que Y.A = O (où O est la matrice nulle d'ordre 2).

2) Trouver une matrice B non nulle d'ordre 2 telle que $B^2 = O$.

Exercice 9

Montrer que si A et B sont des matrices carrées d'ordre n : tr(AB) = tr(BA).

Exercice 10

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. En posant $A = B + 2I_2$, calculer B^2. Calculer A^n (remarquer que B et $2I_2$ commutent et donc que la formule du binôme de Newton s'applique).

Exercice 11

Soit $N = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, calculer N^n. En déduire un moyen de calculer A^n, si $A = \begin{pmatrix} -3 & a & b \\ 0 & -3 & c \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$. (On remarquera que $-3I_3$ et N commutent).

Exercice 12

Déterminer le rang des matrices suivantes :

1)$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, 2)$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, 3)$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, 4)$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.