Leçon 03 – Exercices

Rappel : pour x voisin de zéro

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + x^n\,\varepsilon(x)$$

$$(1 + x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}\,x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}\,x^n + x^n\,\varepsilon(x) \quad (m \in \mathbf{R})$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + x^n\,\varepsilon(x)$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + x^n\,\varepsilon(x)$$

Exercice 1

Etudier l'existence et la nature des extrema éventuels des fonctions f dans les cas suivants :

1) $f(x,y) = x^3 + 2xy - 2x^2 - 2y^2$

2) $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$

3) $f(x,y) = 2(x^2+y^2) - 4xy - 5$

4) $f(x,y) = x^4 - x^2 + 2xy + y^2$

5) $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2 + 1) - 4\sqrt{x^2 + y^2 + 1}$

Exercice 2

Soit $f(x,y) = -x^3 + xy^2 + 2x - 2y$. Rechercher les extrema éventuels de la fonction f et préciser leur nature.

Etudier, selon la valeur du paramètre m, l'existence et la nature des extrema de f telle que : $f(x,y) = y^3 + x^2 - 3my$.

Exercice 3

Etudier l'existence et la nature des extrema des fonctions f suivantes définies sur R^2 par :

1) $f(x,y) = (x + y^2 + 2y)e^{2x}$.

2) $f(x,y) = (x^2 + y^2)\exp(x^2 - y^2)$.

Exercice 4

Soit $f(x,y)= (x+y)\, e^{(x+y)}$.

1) Calculer les dérivées partielles de f et en déduire les points stationnaires de f.

2) Que donne la condition du second ordre quant à l'existence d'un extremum pour f(x,y).

3) Rappeler le développement limité de e^u au voisinage de 0.

Etudier alors la différence $f(x,y) - f(x_0,y_0)$ au voisinage de tout point stationnaire (x_0,y_0) de f. Conclure quant aux extrema de f(x,y).
4) Pouvait-on trouver ce résultat plus simplement ? (justifier)

Exercice 5
Soit $f(x,y,z) = x^3 + x^2y - 4\ln(y^2 + z) + z^2 + 2z + 6y - 2yz$.
1) Préciser l'ensemble sur lequel f est deux fois différentiable.
2) Montrer que (0,1,1) est un point stationnaire de f.
3) Déterminer la nature de ce point stationnaire.

Exercice 6
Déterminer et préciser la nature des extrema éventuels de la fonction f définie par :
$f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2z(x - y) - 2x - 4y$.

Exercice 7
Soit $f(x,y,z) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{y}{x} - \frac{z}{y} - \frac{1}{z}$.
1) Déterminer l'ensemble sur lequel f est différentiable.
2) Montrer que (1,1,-1) est un point stationnaire de f.
3) Déterminer la nature de ce point stationnaire (faire une étude locale en faisant une translation pour se ramener à un voisinage de (0,0,0) et des développement limités à l'ordre 2 si nécessaire)

N.B. : On pourra remarquer que : $\frac{3}{2}h^2 - hk + k^2 + tk + t^2 = (k - \frac{1}{2}h + \frac{1}{2}t)^2 + \frac{5}{4}(h + \frac{1}{5}t)^2 + \frac{7}{10}t^2$.

Exercice 8
Soit la fonction de satisfaction : $S = 58x + 76y - 5x^2 - 2xy + 10y^2$ où x et y sont des quantités demandées des biens X et Y. Soit $p_x = 22$ et $p_y = 57$ les prix de X et de Y. Quelles quantités doit-on acheter de X et de Y pour maximiser sa satisfaction lorsque le budget consacré à ces deux biens est P = 136?

Exercice 9
Déterminer et préciser la nature des extrema éventuels de la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :
$f(x,y) = \frac{x^2}{9} + (y-1)^2$ sous la contrainte $x^2 + 2y = 3$ par la méthode la plus simple.

Exercice 10

Soient f et g les fonctions définies par $f(x,y,z) = x^2 + (y - 1)^2 + (z - 2)^2$ et $g((x,y,z) = f(x,y,z) + x^3$.
f admet-elle un maximum global? Un minimum global ? un maximum local ? un minimum local? (justifier les réponses)
Mêmes question pour g.

Exercice 11
Soient f et g des fonctions de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ définies par :
$f(x,y,z) = \frac{1}{2} x^2 + y^2 + \ln|z|$ et $g(x,y,z) = x + z + 2$.
1) Préciser l'ensemble sur lequel f et g admettent des dérivées partielles d'ordre 2.

2) Déterminer le plus simplement possible les extrema de f sous la contrainte $g(x,y,z) = 0$.

Exercice 12
Déterminer et préciser la nature des extrema éventuels des fonctions f suivantes, les variables x et y étant liées par une contrainte :
$f(x,y) = 3x - 5y$, $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 2$.
$f(x,y) = 2x + y$, $x^2 + y^2 = 5$

Exercice 13
Soit f la fonction définie par $f(x,y) = \frac{1}{1 + xy} - x^2 + 2x$ que l'on cherche à optimiser sous la contrainte $e^{xy} = 2y^2 + 1$.
Déterminer l'ensemble sur lequel f est différentiable.
Montrer que (1,0) est un point stationnaire du Lagrangien.

Exercice 14
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x^2 + y^2 + 4x - 2y + 1$. On considère f sous la contrainte (C) $4x^2 - y^2 = 0$.
Montrer que $A = (-\frac{4}{5} , \frac{8}{5})$ est un point stationnaire du Lagrangien.
A est-il un extrema de f sous la contrainte (C)?

Exercice 15
Un fabricant de gravier pour cours de maison en produit 2 catégories : du gravier grossier et du gravier fin. Une tonne de gravier grossier nécessite 2 heures de broyage, 5 heures de criblage et 8 heures de séchage. Une tonne de gravier fin exige 6 heures de broyage, 3 heures de criblage et 2 heures de séchage. La marge de profit est de 40 € pour le gravier grossier et de 50 € pour le gravier fin. Le fabricant dispose de 36 heures pour le broyage, 30 pour le criblage et de 40 heures pour le séchage.

Déterminer la combinaison des produits qui maximisera les profits.

Exercice 16
La société anonyme des fonderies de Bretagne fabrique, entre autres produits, deux articles P_1 et P_2 qu'elle vend à des grossistes aux prix respectifs de 320€ et 500€. La fabrication des produits P_1 et P_2 nécessite l'utilisation, dans un ordre quelconque de 3 types de machines notées M_1, M_2 et M_3, pendant des temps exprimés en minutes dans le tableau suivant :

	Machines	M_1	M_2	M_3
Produits				
P_1		20	50	10
P_2		30	50	40

Pour cette fabrication, ces machines sont disponibles au cours d'un mois :
300h pour les machines M_1, 500h pour les machines M_2 et 200h pour les machines M_3.
Les marges sur coûts variables, en pourcentage du prix de vente, s'élèvent à 25% pour P_1, 20% pour P_2.

1) Préciser un programme de production permettant d'obtenir la marge sur coût variable maximale et le résoudre par la méthode graphique.

2) En déduire le chiffre d'affaire prévisionnel mensuel.

3) Une société X propose de louer **l'ensemble des heures disponibles** de M_1, M_2 et M_3 aux fonderies de Bretagne. On cherche à déterminer le prix de la location d'une minute de M_1, d'une minute de M_2 et d'une minute de M_3. Le marché ne peut se traiter bien-sûr que dans la mesure où la location du temps machine équivalent à la production d'une unité de P_1(resp. P_2) "rapporte" davantage qu'une unité de P_1(resp. P_2). Il s'agit ici du problème dual au précédent. Poser le problème sans le résoudre.

Exercice 17
Dans une exploitation agricole, on doit choisir entre deux types d'engrais A et B pour fertiliser les terres. Celles-ci requièrent au moins 60 kg de potassium, 120g de calcium et 90g de sodium par hectare.
Dans un paquet d'engrais A, il y a 1 kg de potassium, 3kg de calcium et 3kg de sodium.
Dans un paquet B, il y a 2kg de potassium, 2kg de calcium et 1kg de sodium.
Quelles sont les quantités optimales de A et de B à utiliser par hectare, si le prix des paquets est de 100€ pour A et pour B.