Leçon 03 – Exercices

Rappel : pour x voisin de zéro

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + x^n\varepsilon(x)$$
$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n + x^n\varepsilon(x) \quad (m \in \mathbb{R})$$
$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + x^n\varepsilon(x)$$
$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + x^n\varepsilon(x)$$

Exercice 1

Etudier l'existence et la nature des extrema éventuels des fonctions f dans les cas suivants :

1) $f(x,y) = x^3 + 2xy - 2x^2 - 2y^2$
2) $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$
3) $f(x,y) = 2(x^2+y^2) - 4xy - 5$
4) $f(x,y) = x^4 - x^2 + 2xy + y^2$
5) $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2 + 1) - 4\sqrt{x^2 + y^2 + 1}$

Solution

1) $f(x,y) = x^3 + 2xy - 2x^2 - 2y^2$ est deux fois différentiable sur $\mathbb{R}^2$.

a) Recherche des points stationnaires :

$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 2y - 4x$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 2x - 4y$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$ si et seulement si $3x_0^2 + 2y_0 - 4x_0 = 0$,

$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$ si et seulement si $2y_0 = x_0$. Donc (x_0,y_0) est point stationnaire de f si et seulement si $\begin{cases} x_0 = 2y_0 \\ 2y_0^2 - y_0 = 0 \end{cases}$. D'où les deux points stationnaires A(0,0) et B$(1, \frac{1}{2})$.

b) Conditions du second ordre :

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x - 4$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -4$.

$\delta = (\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y})^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \times \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 24x - 12$.

En A(0,0) : $\delta = -12 < 0$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0$. D'après lecours A correspond à un maximum local de f.

En B$(1, \frac{1}{2})$: $\delta = 12 > 0$. D'après le cours B est un point col (ou point selle).

2) $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$ est deux fois différentiable sur $\mathbf{IR^2}$.
a) Recherche des points stationnaires :

$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 3y^2 - 15$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 6xy - 12$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$ si et seulement si $3x_0^2 + 3y_0^2 - 15 = 0$,

$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$ si et seulement si $x_0y_0 = 2$. Donc (x_0,y_0) est point stationnaire de f si et seulement si $\begin{cases} x_0^2 + y_0^2 = 5 \\ x_0y_0 = 2 \end{cases}$. $y_0 = 0$ n'est pas solution, on peut donc écrire $x_0 = \frac{1}{y_0}$ et le système est équivalent à $\begin{cases} y_0^4 - 5y_0^2 + 4 = 0 \\ x_0y_0 = 2 \end{cases}$. L'équation bicarrée $y_0^4 - 5y_0^2 + 4 = 0$ se résoud en posant $Y = y_0^2$, on obtient $Y = 1$ ou $Y = 4$. D'où les quatre points stationnaires A(2,1) , B(-2, -1) , C(1,2) et D(-1,-2).

b) Conditions du second ordre :

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 6y$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6x$.

$\delta = (\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y})^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \times \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 36(y^2 - x^2)$.

En A(2,1) , et en B(-2, -1): $\delta < 0$.

En A(2,1) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0$. D'après lecours A correspond à un minimun local de f .

En B(-2, -1) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0$. D'après lecours A correspond à un maximun local de f.

En C(1,2) et en D(-1,-2) : $\Delta > 0$. D'après le cours C et D sont des points col (ou points selle).

3) $f(x,y) = 2(x^2+y^2) - 4xy - 5$ est deux fois différentiable sur $\mathbf{IR^2}$.
a) Recherche des points stationnaires :

$\frac{\partial f}{\partial x} = 4(x - y)$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 4(y - x)$

Donc (x_0,y_0) est point stationnaire de f si et seulement si $x_0 = y_0$. Ici il y a une infinité de points stationnaires, ce sont les points de la droite d'équation $y = x$.

b) Conditions du second ordre :

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 4$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -4$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4$.

$\delta = (\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y})^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \times \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$. On ne peut donc pas conclure et il faut faire une étude directe au voisinage de la droite d'équation $y = x$.
$f(x,y) - f(x,x,) = 2(x^2+y^2) - 4xy = 2(x - y)^2 \geq 0$. Cette droite correspond donc à un ensemble de minima locaux de f.

4) $f(x,y) = x^4 - x^2 + 2xy + y^2$ est deux fois différentiable sur $\mathbf{IR^2}$.
a) Recherche des points stationnaires :

$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 2x + 2y$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 2x + 2y$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$ si et seulement si $4x_0^3 - 2x_0 + 2y_0 = 0$,

$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$ si et seulement si $y_0 = -x_0$. Donc (x_0,y_0) est point stationnaire de f si et seulement si $\begin{cases} 4x_0(x_0^2 - 1) = 0 \\ y_0 = -x_0 \end{cases}$. D'où les trois points stationnaires A(0,0) et B(1, -1) et C(-1,1).

b) Conditions du second ordre :

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2 - 2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2$.

$\delta = (\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y})^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \times \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 8 - 24x^2$.

En A(0,0) : $\delta > 0$. D'après lecours A correspond à un point col de f.

En B(1, -1) et en C(-1,1) : $\delta < 0$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0$. D'après le cours B et C correspondent à des minima locaux de f.

5) $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2 + 1) - 4\sqrt{x^2 + y^2 + 1}$ est deux fois différentiable sur $\mathbf{IR}^2$(en effet pour tous réels x et y, $x^2 + y^2 + 1 > 0$).

a) Recherche des points stationnaires :

$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x(1 - 2\sqrt{x^2 + y^2 + 1})}{x^2 + y^2 + 1}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y(1 - 2\sqrt{x^2 + y^2 + 1})}{x^2 + y^2 + 1}$.

Pour tous réels x et y, $x^2 + y^2 + 1 \geq 1$ et $1 - 2\sqrt{x^2 + y^2 + 1} \leq -1$.

Donc (x_0,y_0) est point stationnaire de f si et seulement si $x_0 = y_0 = 0$. f a donc un seul point stationnaire A(0,0).

b) Conditions du second ordre :

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{-2x^2 + 2y^2 + 2}{(x^2 + y^2 + 1)^2} - 4\frac{y^2 + 1}{(x^2 + y^2 + 1)^{3/2}}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{-4xy}{(x^2 + y^2 + 1)^2} + \frac{4xy}{(x^2 + y^2 + 1)^{3/2}}$ et

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{-2y^2 + 2x^2 + 2}{(x^2 + y^2 + 1)^2} - 4\frac{x^2 + 1}{(x^2 + y^2 + 1)^{3/2}}$.

En A(0,0) $\delta = (\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y})^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \times \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -4$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2 < 0$.

D'après lecours A correspond à un maximum local de f.

Remarque : Ici on aurait pu utiliser une méthode plus efficace en faisant un étude directe de f(x,y) – f(0,0) au voisinage de (0,0) en utilisant des développements limités.

En effet $f(x,y) - f(0,0) = \ln(x^2 + y^2 + 1) - 4\sqrt{x^2 + y^2 + 1}$ et puisque $x^2 + y^2$ est voisin de 0 quand (x,y) est voisin de (0,0) :

$\ln(x^2 + y^2 + 1) = x^2 + y^2 + (x^2 + y^2)\varepsilon(x,y)$ (avec $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \varepsilon(x,y) = 0$).

$\sqrt{x^2 + y^2 + 1} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + y^2 + (x^2 + y^2)\varepsilon(x,y)$ (avec $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \varepsilon(x,y) = 0$).

D'où $f(x,y) - f(0,0) = x^2 + y^2 - 4(1 + \frac{1}{2}x^2 + y^2) + (x^2 + y^2)\varepsilon(x,y)$ et

$f(x,y) - f(0,0) \approx -2(x^2 + y^2) \leq 0$ au voisinage de (0,0). Et on retrouve bien que (0,0) correspond à un maximum local de f.

Exercice 2
Soit $f(x,y) = -x^3 + xy^2 + 2x - 2y$.
1) Rechercher les extrema éventuels de la fonction f et préciser leur nature.
2) Etudier, selon la valeur du paramètre m, l'existence et la nature des extrema de f telle que : $f(x,y) = y^3 + x^2 - 3my$.

Solution

1) f est deux fois différentiable sur $\mathbb{R}^2$.
a) Recherche des points stationnaires :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -3x^2 + y^2 + 2 \ , \ \frac{\partial f}{\partial y} = 2xy - 2$$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$ si et seulement si $-3x_0^2 + y_0^2 - 2 = 0$,

$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$ si et seulement si $x_0y_0 = 1$. $x_0 = 0$ n'est pas solution, on peut donc écrire $y_0 = \frac{1}{x_0}$ et le système est équivalent à $\begin{cases} -3x_0^4 + 2x_0^2 + 1 = 0 \\ x_0y_0 = 1 \end{cases}$. L'équation bicarrée $-3x_0^4 + 2x_0^2 + 1 = 0$ se résoud en posant $X = x_0^2$, on obtient $X = 1$ ou $X = \frac{-1}{3}$. D'où les deux points stationnaires ($X = \frac{-1}{3} = x_0^2$ n'a pas de solution) A(1,1) et B(-1, -1).

b) Conditions du second ordre :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -6x \ , \ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2y \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x.$$

$\delta = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \times \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4y^2 + 12x^2 > 0$ en A et B.

D'après le cours A et B sont des points col (ou points selle).

2) $f(x,y) = y^3 + x^2 - 3my$ est deux fois différentiable sur $\mathbb{R}^2$.
a) Recherche des points stationnaires :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \ , \ \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 3m.$$

Si m < 0, pour tout $y \in \mathbb{R}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 3m > 0$ et f n'a pas de points stationnaires.
Si m = 0, A(0,0) est le seul point stationnaire.
Si m > 0, $B(0, \sqrt{m})$ et $C(0, -\sqrt{m})$ sont les deux seuls points stationnaires.

b) Conditions du second ordre :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 \ , \ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0 \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y.$$

$\delta = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \times \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -12y > 0.$

Si m > 0, en $B(0, \sqrt{m})$, $\delta < 0$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0$. D'après le cours B correspond à un minimum local de f. Par contre en $C(0, -\sqrt{m})$, $\delta > 0$ et C est un point col de f.

Si m = 0, $\delta = 0$ et il faut faire une étude directe de $f(x,y) - f(0,0)$ au voisinage de $(0,0)$.

$f(x,y) - f(0,0) = x^2 + y^3$, quantité qui change de signe sur tout voisinage de $(0,0)$. En effet de tels voisinages contiennent des points de la forme $(0,y)$ avec y de signe quelconque et$f(0,y) - f(0,0) = y^3$ est de signe quelconque. Ainsi A est un point col.

Exercice 3
Etudier l'existence et la nature des extrema des fonctions f suivantes définies sur $\mathbb{R}^2$ par :

1) $f(x,y) = (x + y^2 + 2y)e^{2x}$.
2) $f(x,y) = (x^2 + y^2)\exp(x^2 - y^2)$.

Solution

1) $f(x,y) = (x + y^2 + 2y)e^{2x}$ est deux fois différentiable sur $\mathbf{IR^2}$.

a) Recherche des points stationnaires :

$\frac{\partial f}{\partial x} = (2x + 2y^2 + 4y + 1)e^{2x}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = (2y + 2)e^{2x}$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$ si et seulement si $2x_0 + 2y_0^2 + 4y_0 + 1 = 0$,

$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$ si et seulement si $2y_0 + 2 = 0$. Donc (x_0,y_0) est point stationnaire de f si et seulement si $\begin{cases} y_0 = -1 \\ 2x_0 - 1 = 0 \end{cases}$. D'où le seul point stationnaire $A(\frac{1}{2},-1)$.

b) Conditions du second ordre :
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = (4x + 4y^2 + 8y + 4)e^{2x}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = (4y + 4)e^{2x}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2e^{2x}$.

$\delta = (\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y})^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \times \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -4e^2$ en $A(\frac{1}{2},-1)$. 0r $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0$ en $A(\frac{1}{2},-1)$ et A correspond à un minimum local de f.

2) $f(x,y) = (x^2 + y^2)\exp(x^2 - y^2)$ est deux fois différentiable sur $\mathbf{IR^2}$.

a) Recherche des points stationnaires :

$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x(x^2 + y^2 + 1)\exp(x^2 - y^2)$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -2y(x^2 + y^2 - 1)\exp(x^2 - y^2)$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$ si et seulement si $2x_0(x_0^2 + y_0^2 + 1) = 0$,

$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$ si et seulement si $2y_0(x_0^2 + y_0^2 - 1) = 0$. Or pour tous réels x_0 et y_0,

$x_0^2 + y_0^2 + 1 > 0$. Donc (x_0,y_0) est point stationnaire de f si et seulement si $\begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0(y_0^2 - 1) = 0 \end{cases}$.
D'où les points stationnaires A(0,0), B(0,1) et C(0,-1).

b) Conditions du second ordre :

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = (10x^2 + 2y^2 + 2 + 4x^4 + 4x^2y^2)\exp(x^2 - y^2)$,

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -4xy(x^2 + y^2)\exp(x^2 - y^2)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = (-2x^2 - 10y^2 + 2 + 4y^4 + 4x^2y^2)\exp(x^2 - y^2)$.

En A(0,0) :

$\delta = (\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y})^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \times \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -4$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2$. f atteint donc un minimum local en A(0,0).

En B(0,1) et C(0,-1) :

$\Delta = (\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y})^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \times \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 16e^{-2} > 0$. B(0,1) et C(0,-1) sont donc des points col (ou points selle) de f.

Exercice 4

Soit $f(x,y)= (x+y)\, e^{(x+y)}$.

1) Calculer les dérivées partielles de f et en déduire les points stationnaires de f.

2) Que donne la condition du second ordre quant à l'existence d'un extremum pour f(x,y).

3) Rappeler le développement limité de e^u au voisinage de 0.

Etudier alors la différence $f(x,y) - f(x_0,y_0)$ au voisinage de tout point stationnaire (x_0,y_0) de f.

Conclure quant aux extrema de f(x,y).

4) Pouvait-on trouver ce résultat plus simplement ? (justifier)

Solution

1) $f(x,y)= (x+y)\, e^{(x+y)}$ admet des dérivées partielles sur $\mathbf{IR}^2$ et $\frac{\partial f}{\partial x} = (x + y + 1)e^{(x+y)}$,

$\frac{\partial f}{\partial y} = (x + y + 1)e^{(x+y)}$.

Donc (x_0,y_0) est point stationnaire de f si et seulement si $x_0 + y_0 + 1 = 0$. Il y a donc une infinité de points stationnaires, ce sont les points de la droite **D** d'équation $x + y + 1 = 0$.

2) Conditions du second ordre :

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = (x + y + 2)e^{(x+y)}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = (x + y + 2)e^{(x+y)}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = (x + y + 2)e^{(x+y)}$.

Donc $\delta = (\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y})^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \times \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ et on ne peut pas conclure.

3) $e^u = 1 + \frac{u}{1!} + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + \ldots + \frac{u^n}{n!} + u^n \varepsilon(u)$ avec $\lim_{u \to 0} \varepsilon(u) = 0$.

$f(x,y) - f(x_0,y_0) = (x + y)e^{x+y} - (x_0 + y_0)\exp(x_0 + y_0)$. Or $x_0 + y_0 + 1 = 0$, donc $f(x,y) - f(x_0,y_0) = (x + y)e^{x+y} + e^{-1}$. Posons $x + y = -1 + h$, si (x,y) est voisin de **D**, h est voisin de 0 et $f(x,y) - f(x_0,y_0) = (-1 + h)e^{-1+h} + e^{-1} = (-1 + h)[\, e^{-1}(1 + h + \frac{h^2}{2} + h^2\varepsilon(h))] + e^{-1}$.

$f(x,y) - f(x_0,y_0) = e^{-1}(\frac{h^2}{2} + h^2\varepsilon(h))$ avec $\lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$.

$f(x,y) - f(x_0,y_0) \geq 0$ au voisinage de **D** et la droite **D** d'équation $x + y + 1 = 0$ correspond donc à des minima locaux de f.

4) En posant $v = x + y$, $f(x,y) = ve^v = F(v)$.
$F'(v) = e^v + ve^v$ et $F'(v)$ et change de signe en $v = -1$.
Si $v < -1$, $F'(v) < 0$ et si $v > -1$, $F'(v) > 0$. F atteint donc un minimum local en -1 et ce minimum vaut $-e^{-1}$.On retrouve alors le résultat précédent : f atteint un minimum local pour $x + y = -1$.

Exercice 5
Soit $f(x,y,z) = x^3 + x^2y - 4\ln(y^2 + z) + z^2 + 2z + 6y - 2yz$.
1) Préciser l'ensemble sur lequel f est deux fois différentiable.
2) Montrer que (0,1,1) est un point stationnaire de f.
3) Déterminer la nature de ce point stationnaire.

Solution

1) f est deux fois différentiable sur $\mathcal{D} = \{(x,y,z)\in \mathbf{IR^3} \,;\, y^2 + z \neq 0\}$.
2) $(0,1,1)\in \mathcal{D}$ et sur $\mathcal{D}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 2xy$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = x^2 - \dfrac{8y}{y^2 + z} + 6 - 2z$ et
$\dfrac{\partial f}{\partial z} = -\dfrac{4}{y^2 + z} + 2z + 2 - 2y$.
$\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,1,1) = 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,1,1) = 0$ et $\dfrac{\partial f}{\partial z}(0,1,1) = 0$. (0,1,1) est donc bien un point stationnaire de f.

3) f est une fonction de trois variables, il faut donc étudier $\Delta = f(x,y,z) - f(0,1,1)$ au voisinage de (0,1,1). ¨Posons $y = 1 + k$ et $z = 1 + t$. (x,y,z) est voisin de (0,1,1) si et seulement si (x,k,t) est voisin de (0,0,0).
$\Delta = f(x,1 + k,1 + t) - f(0,1,1)$,
$\Delta = x^3 + x^2(1 + h) - 4\ln(2 + (2k + k^2 + t)) + 1 + 2t + t^2 + 2(1 + t) + 6(1 + k) - 2(1 + k)(1 + t) - (- 4\ln 2 + 7)$.
Il faut faire un développement limité de $\ln(2 + (2k + k^2 + t))$ au voisinage (0,0,0).
$\ln(2 + (2k + k^2 + t)) = \ln 2 + \ln(1 + (k + \dfrac{k^2}{2} + \dfrac{t}{2}))$ et $(k + \dfrac{k^2}{2} + \dfrac{t}{2})$ est voisin de 0.
Donc $\ln(2 + (2k + k^2 + t)) = \ln 2 + (k + \dfrac{k^2}{2} + \dfrac{t}{2}) - \dfrac{1}{2}(k + \dfrac{k^2}{2} + \dfrac{t}{2})^2 + \text{reste}$.
Le terme "reste" désigne une quantité négligeable devant les termes d'ordre inférieur ou égal à deux quand (k,t) est voisin de (0,0).
$\ln(2 + (2k + k^2 + t)) = \ln 2 + k + \dfrac{t}{2} - \dfrac{1}{2}kt - \dfrac{1}{8}t^2 + \text{reste}$. D'où
$\Delta = x^2 - 4(k + \dfrac{t}{2} - \dfrac{1}{2}kt - \dfrac{1}{8}t^2) + 2t + t^2 + 2t + 6k - 2k - 2t - 2kt + \text{reste}$,
$\Delta = x^2 + \dfrac{3}{2}t^2 + \text{reste}$. Donc $\Delta \geq 0$ pour (x,k,t) voisin de (0,0,0) et (0,1,1) correspond à un minimum local de f.

Exercice 6
Déterminer et préciser la nature des extrema éventuels de la fonction f définie par :
$f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2z(x - y) -2x -4y$.

Solution

f admet des dérivées partielles sur $\mathbf{IR}^3$.

a) Recherche des points stationnaires :

$\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x + 2z - 2$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 4y - 2z - 4$ et $\dfrac{\partial f}{\partial z} = 4z + 2(x - y)$.

(x_0,y_0) est point stationnaire de f si et seulement si $\begin{cases} x_0 + z_0 = 1 \\ 2y_0 - z_0 = 2 \\ x_0 - y_0 + 2z_0 = 0 \end{cases}$. D'où le point stationnaire A(1,1,0).

b) Nature du point stationnaire A :

Ici encore , il faut donc étudier $\Delta = f(x,y,z) - f(1,1,0)$ au voisinage de (1,1,0). ¨Posons x = 1 + h et y = 1 + k. (x,y,z) est voisin de (1,1,0) si et seulement si (h,k,z) est voisin de (0,0,0).
$\Delta = f(1+h,1+k,z) - f(0,1,1) = (1 + h)^2 + 2(1 + k)^2 + 2z^2 + 2z(h - k) - 2(1 + h) - 4(1 + k) + 3$,
$\Delta = h^2 + 2k^2 + 2z^2 + 2zh - 2zk = (h + z)^2 + (z + k)^2 \geq 0$. On en déduit donc que f atteint un minimum local en A(1,1,0).

Exercice 7

Soit $f(x,y,z) = \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{y}{x} - \dfrac{z}{y} - \dfrac{1}{z}$.

1) Déterminer l'ensemble sur lequel f est différentiable.
2) Montrer que (1,1,-1) est un point stationnaire de f.
3) Déterminer la nature de ce point stationnaire (faire une étude locale en faisant une translation pour se ramener à un voisinage de (0,0,0) et des développement limités à l'ordre 2 si nécessaire)

N.B. : On pourra remarquer que : $\dfrac{3}{2}h^2 - hk + k^2 + tk + t^2 = (k - \dfrac{1}{2}h + \dfrac{1}{2}t)^2 + \dfrac{5}{4}(h + \dfrac{1}{5}t)^2 + \dfrac{7}{10}t^2$.

Solution

1) f est deux fois différentiable sur $\mathcal{D} = \{(x,y,z) \in \mathbf{IR}^3 ; x \neq 0, y \neq 0 \text{ et } z \neq 0\}$,
$\mathcal{D} = \{(x,y,z) \in \mathbf{IR}^3 ; xyz \neq 0\}$.

2) $(1,1,-1) \in \mathcal{D}$ et sur $\mathcal{D}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x} = x - \dfrac{y}{x^2}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{z}{y^2}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial z} = -\dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z^2}$.

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,1,-1) = 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,1,-1) = 0$ et $\dfrac{\partial f}{\partial z}(1,1,-1) = 0$. (1,1,-1) est donc bien un point stationnaire de f.

3) f est une fonction de trois variables, il faut donc étudier $\Delta = f(x,y,z) - f(1,1,-1)$ au voisinage de (1,1,-1). ¨Posons x = 1 + h, y = 1 + k et z = -1 + t. (x,y,z) est voisin de (1,1,-1) si et seulement si (h,k,t) est voisin de (0,0,0).

$\Delta = f(1 + h,1 + k,-1 + t) - f(1,1,-1) = \dfrac{1}{2}(1 + h)^2 + \dfrac{1 + k}{1 + h} - \dfrac{-1 + t}{1 + k} - \dfrac{1}{-1 + t} - \dfrac{7}{2}$,

$\Delta = \frac{1}{2} + h + \frac{h^2}{2} + (1 + k)(\frac{1}{1+h}) - (-1 + t)(\frac{1}{1+k}) - \frac{1}{-1+t} - \frac{7}{2}$,

Il faut faire des développements limités des trois termes $\frac{1}{1+h}$, $\frac{1}{1+k}$ et $\frac{1}{-1+t}$.

On a $\frac{1}{1+h} = 1 - h + h^2 +$ reste, $\frac{1}{1+k} = 1 - k + k^2 +$ reste et $\frac{1}{-1+t} = -1 - t - t^2 +$ reste.

Le terme "reste" désigne une quantité négligeable devant les termes d'ordre inférieur ou égal à deux quand la variable est voisine de 0.

$\Delta = \frac{1}{2} + h + \frac{h^2}{2} + (1 + k)(1 - h + h^2) - (-1 + t)(1 - k + k^2) - (-1 - t - t^2) - \frac{7}{2}$ + reste,

$\Delta = \frac{3}{2}h^2 - hk + k^2 + tk + t^2$ + reste $= (k - \frac{1}{2}h + \frac{1}{2}t)^2 + \frac{5}{4}(h + \frac{1}{5}t)^2 + \frac{7}{10}t^2$ + reste (la dernière égalité est donnée par l'énoncé).

Donc $\Delta \geq 0$ pour (h,k,t) voisin de (0,0,0) et f atteint un minimum local en A(1,1,-1).

Exercice 8

Soit la fonction de satisfaction : $S = 58x + 76y - 5x^2 - 2xy + 10y^2$ où x et y sont des quantités demandées des biens X et Y. Soit $p_x = 22$ et $p_y = 57$ les prix de X et de Y. Quelles quantités doit-on acheter de X et de Y pour maximiser sa satisfaction lorsque le budget consacré à ces deux biens est P = 136?

Solution

On a donc la contrainte budgétaire (C) $22x + 57y = 136$.

Et on veut optimiser $S = 58x + 76y - 5x^2 - 2xy + 10y^2$ sous la contrainte budgétaire (C).

Ici le Lagrangien n'est pas utile puisque $x = \frac{13- - 57y}{22}$ et il suffit d'optimiser :

$\begin{cases} -8897y^2 + 35588y + 8056 = 0 \\ x = \frac{13- - 57y}{22} \end{cases}$. On obtient y = 2 et x = 1. La satisfaction est optimisée avec un bien X et 2 biens Y.

Exercice 9

Déterminer et préciser la nature des extrema éventuels de la fonction définie sur R^2 par :

$f(x,y) = \frac{x^2}{9} + (y-1)^2$ sous la contrainte $x^2 + 2y = 3$ par la méthode la plus simple.

Solution

f et la contrainte (C) $x^2 + 2y = 3$ sont différentiables sur $\mathbf{IR^2}$. D'autre par ici $y = \frac{1}{2}(3 - x^2)$ et il suffit d'optimiser $\begin{cases} \varphi(x) = -\frac{x^2}{9} + (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x^2)^2 \\ y = \frac{1}{2}(3 - x^2) \end{cases}$. $\varphi(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{7}{18}x^2 + \frac{1}{4}$ et $\varphi'(x) = x(x^2 - \frac{7}{9})$.

D'où le tableau de variation :

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{7}}{3}$		0		$\frac{\sqrt{7}}{3}$		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
φ		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

On en déduit que φ atteint un maximum local en $x = 0$ et deux minima locaux en $x = -\frac{\sqrt{7}}{3}$ et $x = \frac{\sqrt{7}}{3}$. Donc f atteint, sous la contrainte (C) un maximum local en $(0, \frac{3}{2})$ et deux minima locaux en $(-\frac{\sqrt{7}}{3}, \frac{10}{9})$ et en $(\frac{\sqrt{7}}{3}, \frac{10}{9})$.

Exercice 10

Soient f et g les fonctions définies par $f(x,y,z) = x^2 + (y - 1)^2 + (z - 2)^2$ et $g((x,y,z) = f(x,y,z) + x^3$.

1) f admet-elle un maximum global? Un minimum global ? un maximum local ? un minimum local? (justifier les réponses)

2) Mêmes question pour g.

Solution

1) Quand x, ou y ou z tend vers l'infini f tend vers $+\infty$, donc f n'a pas de maximum global. D'autre part pour tout $(x,y,z)\in \mathbf{IR}^3$, $f(x,y,z) = x^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 \geq 0 = f(0,1,2)$. Donc f atteint un minimum global en (0,1,2) qui vaut 0. C'est aussi un minimum local de f.

$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 2(y-1)$ et $\frac{\partial f}{\partial z} = 2(z-2)$. Donc (0,1,2) est le seul point stationnaire de f est c'est le seul minimum local de f.

2) De même quand x tend vers $+\infty$, g tend vers $+\infty$, donc g n'a pas de maximum global. Quand x tend vers $-\infty$, g tend vers $-\infty$, donc g n'a pas de minimum global.

$\frac{\partial g}{\partial x} = 2x + 3x^2$, $\frac{\partial g}{\partial y} = 2(y-1)$ et $\frac{\partial g}{\partial z} = 2(z-2)$. g a donc deux points stationnaires (0,1,2) et $(-\frac{2}{3}, 1, 2)$.

$g(x,y,z) - g(0,1,2) = x^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 + x^3 \approx x^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2$ au voisinage de (0,1,2) (en effet au voisinage de 0, x^3 est négligeable devant x^2). Donc $g(x,y,z) - g(0,1,2) \geq 0$ au voisinage de (0,1,2) et g atteint un minimum local en (0,1,2).

$\Delta = g(x,y,z) - g(-\frac{2}{3}, 1, 2) = x^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 + x^3 - \frac{44}{27}$.

Posons $x = -\frac{2}{3} + h$, $y = 1 + k$ et $z = 2 + t$. (x,y,z) est voisin de $(-\frac{2}{3}, 1, 2)$ si et seulement si (h,k,t) est voisin de (0,0,0).

$\Delta = (-\frac{2}{3} + h)^2 + k^2 + t^2 + (-\frac{2}{3} + h)^3 - \frac{44}{27} = -\frac{14}{9}h^2 + k^2 + t^2 + h^3 \approx -\frac{14}{9}h^2 + k^2 + t^2$ au voisinage de (0,0,0). Sur tout voisinage de (0,0,0) on peut avoir $h = 0$ et $\Delta \geq 0$. Sur tout voisinage de

(0,0,0) on peut aussi avoir k = t = 0 et $\Delta \leq 0$. Ainsi Δ change de signe pour (h,k,t) voisin de (0,0,0). Ainsi $(-\frac{2}{3}, 1, 2)$ est un point col de g.

g a donc seulement un minimum local et pas de maximum local.

Exercice 11

Soient f et g des fonctions de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ définies par :

$f(x,y,z) = \frac{1}{2}x^2 + y^2 + \ln|z|$ et $g(x,y,z) = x + z + 2$.

1) Préciser l'ensemble sur lequel f et g admettent des dérivées partielles d'ordre 2.

2) Déterminer le plus simplement possible les extrema de f sous la contrainte $g(x,y,z) = 0$.

Solution

1) f et g admettent des dérivées partielles d'ordre 2 sur $\mathcal{D} = \{(x,y,z)\in \mathbb{R}^3 \; ; \; z \neq 0\}$.

2) Ici on peut écrire x = -z – 2 et optimiser f sous la contrainte (C) x + z + 2 = 0 revient à

optimiser $\begin{cases} \varphi(y,z) = \frac{1}{2}(z+2)^2 + y^2 + \ln|z| \\ x = -z-2 \\ (x,y,z)\in \mathcal{D} \end{cases}$.

Si $z \neq 0$, $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 2y$ et $\frac{\partial \varphi}{\partial z} = z + 2 + \frac{1}{z} = \frac{z^2+2z+1}{z} = \frac{(z+1)^2}{z}$. φ a donc pour unique point stationnaire A(0,-1) $(-1 \neq 0)$.

$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 2$, $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z} = 0$ et $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 1 - \frac{1}{z^2}$ et $\delta = (\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z})^2 - (\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2})(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}) = -2(1-\frac{1}{z^2}) = 0$. On ne peut pas conclure et il fautt faire une étude directe de $\varphi(y,z) - \varphi(0,-1)$ au voisinage de (0,-1).

Posons z = -1 + t, (y,z) est voisin de (0,-1) si et seulement si (y,t) est voisin de (0,0) et $-1 + t < 0$ donc $|z| = |-1 + t| = 1 - t$.

$\varphi(y,z) - \varphi(0,-1) = \frac{1}{2}(1+t)^2 + y^2 + \ln(1-t) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + t + \frac{t^2}{2} + y^2 + (-t - \frac{1}{2}t^2 + \text{reste}) - \frac{1}{2}$.

Le terme "reste" désigne une quantité négligeable devant les termes d'ordre inférieur ou égal à deux quand t est voisin de 0.

$\varphi(y,z) - \varphi(0,-1) = t^2 + y^2 + \text{reste}$.

Donc $\varphi(y,z) - \varphi(0,-1) \geq 0$ pour (y,t) voisin de (0,0) et φ atteint un minimum en (0,-1).

Donc f sous la contrainte (C) atteint un minimum local en (-1, 0,-1).

Exercice 12

Déterminer et préciser la nature des extrema éventuels des fonctions f suivantes, les variables x et y étant liées par une contrainte :

1) $f(x,y) = 3x - 5y$, $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 2$.

2) $f(x,y) = 2x + y$, $x^2 + y^2 = 5$

Solution

1) f et la contrainte (C) $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 2$ admettent des dérivées partielles à tous les ordres sur $\mathbb{R}^2$.

Ici il faut utiliser le Lagrangien $L(x,y,\lambda) = 3x - 5y + \lambda((x-1)^2 + (y+1)^2 - 2)$.

a) Recherche des points stationnaires du Lagrangien :

$\dfrac{\partial L}{\partial x} = 3 + 2\lambda(x - 1)$, $\dfrac{\partial L}{\partial y} = -5 + 2\lambda (y + 1)$ et $\dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = (x-1)^2 + (y+1)^2 - 2$.

(x_0,y_0) est un point stationnaire de L pour la valeur λ_0 de λ si et seulement si $\begin{cases} 2\lambda_0 (x_0 - 1) = -3 \\ 2\lambda_0(y_0 + 1) = 5 \\ (x_0 - 1)^2 + (y_0 + 1)^2 = 2 \end{cases}$. $\lambda_0 = 0$ n'est pas solution et $x_0 = 1 + \dfrac{-3}{2\lambda_0}$ et $y_0 = -1 + \dfrac{5}{2\lambda_0}$. En reportant dans la dernière équation on obtient $\lambda_0 = \pm\dfrac{\sqrt{17}}{2}$. Et on a deux points stationnaires :

$A(1 - \dfrac{3\sqrt{17}}{17}, -1 + \dfrac{5\sqrt{17}}{17})$ pour $\lambda = \dfrac{\sqrt{17}}{2}$ et $B(1 + \dfrac{3\sqrt{17}}{17}, -1 - \dfrac{5\sqrt{17}}{17})$ pour $\lambda = -\dfrac{\sqrt{17}}{2}$.

b) Etude de $\Delta = f(x,y) - f(x_0,y_0)$ au voisinage de (x_0,y_0) sous (C).

Pour $\mathbf{A(1 - \dfrac{3\sqrt{17}}{17}, -1 + \dfrac{5\sqrt{17}}{17})}$:

Posons $x = 1 - \dfrac{3\sqrt{17}}{17} + h$ et $y = -1 + \dfrac{5\sqrt{17}}{17} + k$. (x,y) est voisin de $(1 - \dfrac{3\sqrt{17}}{17}, -1 + \dfrac{5\sqrt{17}}{17})$ si et seulement si (h,k) est voisin de $(0,0)$. On a $\begin{cases} \Delta = 3h - 5k \\ h^2 - \dfrac{6\sqrt{17}}{17} h + k^2 + \dfrac{10\sqrt{17}}{17} k = 0 \end{cases}$.

La dernière équation (contrainte) donne $3h - 5k = \dfrac{\sqrt{17}}{2}(h^2 + k^2)$. Donc $\Delta = \dfrac{\sqrt{17}}{2}(h^2 + k^2) \geq 0$ pour (h,k) voisin de $(0,0)$ et, sous la contrainte (C), f atteint un minimum local en A.

Pour $\mathbf{B(1 + \dfrac{3\sqrt{17}}{17}, -1 - \dfrac{5\sqrt{17}}{17})}$:

Posons $x = 1 + \dfrac{3\sqrt{17}}{17} + h$ et $y = -1 - \dfrac{5\sqrt{17}}{17} + k$. (x,y) est voisin de $(1 + \dfrac{3\sqrt{17}}{17}, -1 - \dfrac{5\sqrt{17}}{17})$ si et seulement si (h,k) est voisin de $(0,0)$. On a $\begin{cases} \Delta = 3h - 5k \\ h^2 + \dfrac{6\sqrt{17}}{17} h + k^2 - \dfrac{10\sqrt{17}}{17} k = 0 \end{cases}$.

La dernière équation (contrainte) donne $3h - 5k = -\dfrac{\sqrt{17}}{2}(h^2 + k^2)$.

Donc $\Delta = -\dfrac{\sqrt{17}}{2}(h^2 + k^2) \leq 0$ pour (h,k) voisin de $(0,0)$ et, sous la contrainte (C), f atteint un maximum local en B.

2) f et la contrainte (C) $x^2 + y^2 = 5$ admettent des dérivées partielles à tous les ordres sur $\mathbf{IR^2}$.
Ici il faut utiliser le Lagrangien $L(x,y,\lambda) = 2x + y + \lambda(x^2 + y^2 - 5)$.

a) Recherche des points stationnaires du Lagrangien :

$\dfrac{\partial L}{\partial x} = 2 + 2\lambda x$, $\dfrac{\partial L}{\partial y} = 1 + 2\lambda y$ et $\dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - 5$.

(x_0,y_0) est un point stationnaire de L pour la valeur λ_0 de λ si et seulement si $\begin{cases} \lambda_0 x_0 = -1 \\ 2\lambda_0 y_0 = -1 \\ x_0^2 + y_0^2 = 5 \end{cases}$.

$\lambda_0 = 0$, n'est pas solution et $x_0 = \frac{-1}{\lambda_0}$ et $y_0 = \frac{-1}{2\lambda_0}$. En reportant dans la dernière équation on obtient $\lambda_0 = \pm\frac{1}{2}$. Et on a deux points stationnaires : A(-2 , -1) pour $\lambda = \frac{1}{2}$ et B(2,1) pour $\lambda = -\frac{1}{2}$.

b) Etude de $\Delta = f(x,y) - f(x_0,y_0)$ au voisinage de (x_0,y_0) sous (C).

Pour **A(-2 , -1):**

Posons $x = -2 + h$ et $y = -1 + k$. (x,y) est voisin de (-2, -1) si et seulement si (h,k) est voisin de (0,0). On a $\begin{cases}\Delta = 2h + k \\ h^2 - 4h + k^2 - 2k = 0\end{cases}$.

La dernière équation (contrainte) donne $2h + k = \frac{1}{2}(h^2 + k^2)$. Donc $\Delta = \frac{1}{2}(h^2 + k^2) \geq 0$ pour

(h,k) voisin de (0,0) et, sous la contrainte (C), f atteint un minimum local en A.

Pour **B(2 , 1):**

Posons $x = 2 + h$ et $y = 1 + k$. (x,y) est voisin de (2, 1) si et seulement si (h,k) est voisin de (0,0). On a $\begin{cases}\Delta = 2h + k \\ h^2 + 4h + k^2 + 2k = 0\end{cases}$.

La dernière équation (contrainte) donne $2h + k = -\frac{1}{2}(h^2 + k^2)$. Donc $\Delta = -\frac{1}{2}(h^2 + k^2) \leq 0$ pour (h,k) voisin de (0,0) et, sous la contrainte (C), f atteint un maximum local en B.

Exercice 13

Soit f la fonction définie par $f(x,y) = \frac{1}{1 + xy} - x^2 + 2x$ que l'on cherche à optimiser sous la contrainte $e^{xy} = 2y^2 + 1$.

1) Déterminer l'ensemble sur lequel f est différentiable.

2) Montrer que (1,0) est un point stationnaire du Lagrangien.

Solution

1) f est différentiable sur $\mathcal{D} = \{(x,y)\in \mathbf{IR}^2 ; xy \neq -1\}$. La contrainte est différentiable sur $\mathbf{IR}^2$.

2) $(1,0)\in \mathcal{D}$ et sur $\mathcal{D}$ et pour $\lambda\in$ **IR**, $L(x,y,\lambda) = \frac{1}{1 + xy} - x^2 + 2x + \lambda(e^{xy} - 2y^2 - 1)$.

$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{-y}{(1 + xy)^2} - 2x + 2 + \lambda y e^{xy}$, $\frac{\partial L}{\partial y} = \frac{-x}{(1 + xy)^2} + \lambda(x e^{xy} - 4y)$ et

$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = e^{xy} - 2y^2 - 1$.

$\frac{\partial L}{\partial x}(1,0) = 0$, $\frac{\partial L}{\partial y}(0,1) = -1 + \lambda$ et $\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0$. Donc (1,0) est bien un point un point stationnaire du Lagrangien L correspondant à la valeur 1 du multiplicateur de Lagrange λ.

Exercice 14
Soit f la fonction définie sur **IR**^{2} par $f(x,y) = x^2 + y^2 + 4x - 2y + 1$. On considère f sous la contrainte (C) $4x^2 - y^2 = 0$.

1) Montrer que $A = (-\frac{4}{5}, \frac{8}{5})$ est un point stationnaire du Lagrangien.

2) A est-il un extrema de f sous la contrainte (C)?

Solution

1) f est différentiable sur $\mathbf{IR^2}$ ainsi que (C).
Le Lagrangien est $L(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 + 4x - 2y + 1 + \lambda(4x^2 - y^2)$.
$\frac{\partial L}{\partial x} = 2x + 4 + 8\lambda x$, $\frac{\partial L}{\partial y} = 2y - 2 - 2\lambda y$ et $\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 4x^2 - y^2$.
$\frac{\partial L}{\partial x}(-\frac{4}{5}, \frac{8}{5}) = \frac{12}{5} - \frac{32}{5}\lambda$, $\frac{\partial L}{\partial y}(-\frac{4}{5}, \frac{8}{5}) = \frac{6}{5} - \frac{16}{5}\lambda$ et $\frac{\partial L}{\partial \lambda}(-\frac{4}{5}, \frac{8}{5}) = 0$.

Donc si $\lambda = \frac{3}{8}$, $\frac{\partial L}{\partial x}(-\frac{4}{5}, \frac{8}{5}) = 0$, $\frac{\partial L}{\partial y}(-\frac{4}{5}, \frac{8}{5}) = 0$ et $\frac{\partial L}{\partial \lambda}(-\frac{4}{5}, \frac{8}{5}) = 0$. Et $A(-\frac{4}{5}, \frac{8}{5})$ est bien un point stationnaire de L correspondant à $\lambda = \frac{3}{8}$.

2) Nature de $A(-\frac{4}{5}, \frac{8}{5})$:

Etudions le signe de Etude de $\Delta = f(x,y) - f(-\frac{4}{5}, \frac{8}{5})$ au voisinage de $(-\frac{4}{5}, \frac{8}{5})$ sous (C).

Posons $x = -\frac{4}{5} + h$ et $y = \frac{8}{5} + k$. (x,y) est voisin de $(-\frac{4}{5}, \frac{8}{5})$ si et seulement si (h,k) est voisin de (0,0). On a $\begin{cases} \Delta = (-\frac{4}{5} + h)^2 + (\frac{8}{5} + k)^2 + 4(-\frac{4}{5} + h) - 2(\frac{8}{5} + k) + 1 \\ (-\frac{4}{5} + h)^2 - (\frac{8}{5} + k)^2 = 0 \end{cases}$,

$\begin{cases} \Delta = \frac{12}{5} h + \frac{6}{5} k + h^2 + k^2 \\ -\frac{32}{5} h - \frac{6}{5} k + 4h^2 - k^2 = 0 \end{cases}$. Donc $\frac{12}{5} h + \frac{6}{5} k = \frac{3}{8}(4h^2 - k^2)$ et $\Delta = \frac{5}{2} h^2 + \frac{5}{8} k^2 \geq 0$.

$A(-\frac{4}{5}, \frac{8}{5})$ correspond donc à un minimum de f sous la contrainte (C).

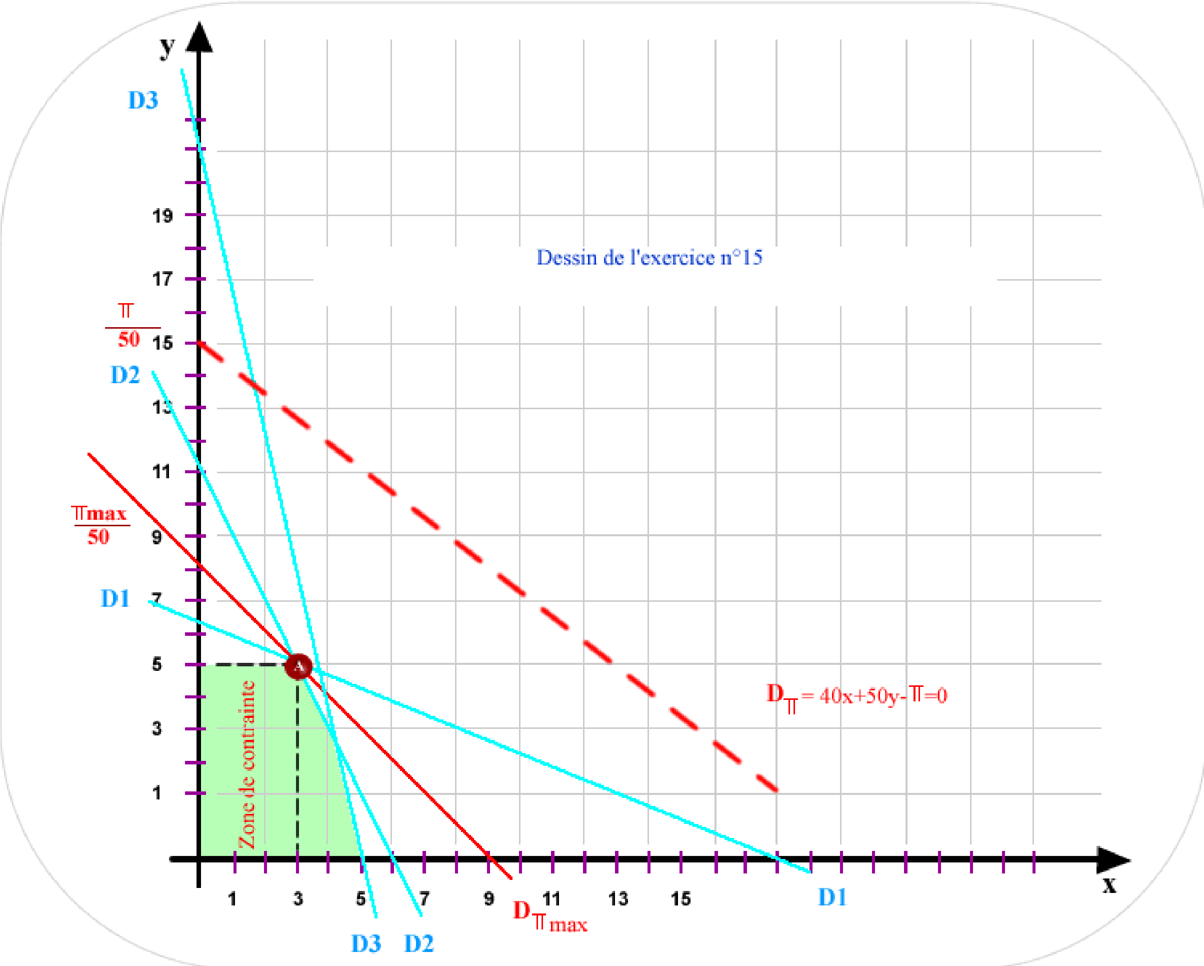
Exercice 15
Un fabricant de gravier pour cours de maison en produit 2 catégories : du gravier grossier et du gravier fin. Une tonne de gravier grossier nécessite 2 heures de broyage, 5 heures de criblage et 8 heures de séchage. Une tonne de gravier fin exige 6 heures de broyage, 3 heures de criblage et 2 heures de séchage. La marge de profit est de 40 € pour le gravier grossier et de 50 € pour le gravier fin. Le fabricant dispose de 36 heures pour le broyage, 30 pour le criblage et de 40 heures pour le séchage.
Déterminer la combinaison des produits qui maximisera les profits.

Solution

Soit Π le profit du fabriquant. Si x est la quantité de gravier grossier (en tonnes) et y celle de gravier fin (en tonnes). On a : $\Pi = 40x + 50y$ et les contraintes $\begin{cases} 2x + 6y \leq 6 \text{ (broyage)} \\ 5x + 3y \leq 30 \text{ (criblage)} \\ 8x + 2y \leq 40 \text{ (séchage)} \\ x \in \mathbb{N} \text{ et } y \in \mathbb{N} \end{cases}$.

On représente les droites D_1, D_2 et D_3 d'équations respectives, $2x + 6y = 36$, $5x + 3y = 30$ et $8x + 2y = 40$.

La zone de contrainte est dans le premier quadrant (car $x \geq 0$ et $y \geq 0$) et à l'intersection des trois demi-plans définis par les inégalités si dessus et délimités par ces trois droites (zone verte du dessin). Soit D_Π, les droites d'équation
$40x + 50y - \Pi = 0$ (Π joue le rôle de paramètre). Plus la droite D_Π est éloignée de l'origine, plus Π est grand ($\frac{\Pi}{50}$ est l'ordonnée à l'origine). Le point cherché correspondant au profit maximum est à l'intersection de la zone de contrainte et de la droite D_Π la plus éloignée de 0 (droite rouge). Cest le point A(3,5). Le profit maximum correspond à 3 tonnes de gravier grossier et 5 tonnesde gravier fin. Et le profit maximum vaut $\Pi_{max} = 3\times40 + 5\times50 = 370$ €.



Exercice 16

La société anonyme des fonderies de Bretagne fabrique, entre autres produits, deux articles P_1 et P_2 qu'elle vend à des grossistes aux prix respectifs de 320€ et 500€. La fabrication des produits P_1 et P_2 nécessite l'utilisation, dans un ordre quelconque de 3 types de machines notées M_1, M_2 et M_3, pendant des temps exprimés en minutes dans le tableau suivant :

	Machines	M_1	M_2	M_3
Produits				
P_1		20	50	10
P_2		30	50	40

Pour cette fabrication, ces machines sont disponibles au cours d'un mois :
300h pour les machines M_1, 500h pour les machines M_2 et 200h pour les machines M_3.
Les marges sur coûts variables, en pourcentage du prix de vente, s'élèvent à 25% pour P_1, 20% pour P_2.

1) Préciser un programme de production permettant d'obtenir la marge sur coût variable maximale et le résoudre par la méthode graphique.

2) En déduire le chiffre d'affaire prévisionnel mensuel.

3) Une société X propose de louer **l'ensemble des heures disponibles** de M_1, M_2 et M_3 aux fonderies de Bretagne. On cherche à déterminer le prix de la location d'une minute de M_1, d'une minute de M_2 et d'une minute de M_3. Le marché ne peut se traiter bien-sûr que dans la mesure où la location du temps machine équivalent à la production d'une unité de P_1(resp. P_2) "rapporte" davantage qu'une unité de P_1(resp. P_2). Il s'agit ici du problème dual au précédent. Poser le problème sans le résoudre.

Solution

1) Si on fabrique x produits P_1 et y produits P_2, on a les contraintes suivantes :

$$\begin{cases} 20x + 30y \leq 300\times 60 \text{ (pour } M_1) \\ 50x + 50y \leq 500\times 60 \text{ (pour } M_2) \\ 10x + 40y \leq 200\times 60 \text{ (pour } M_3) \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} 2x + 3y \leq 1800 \\ x + y \leq 600 \\ x + 4y \leq 1200 \\ x\in \mathbf{N} \text{ et } y\in \mathbf{N} \end{cases}.$$

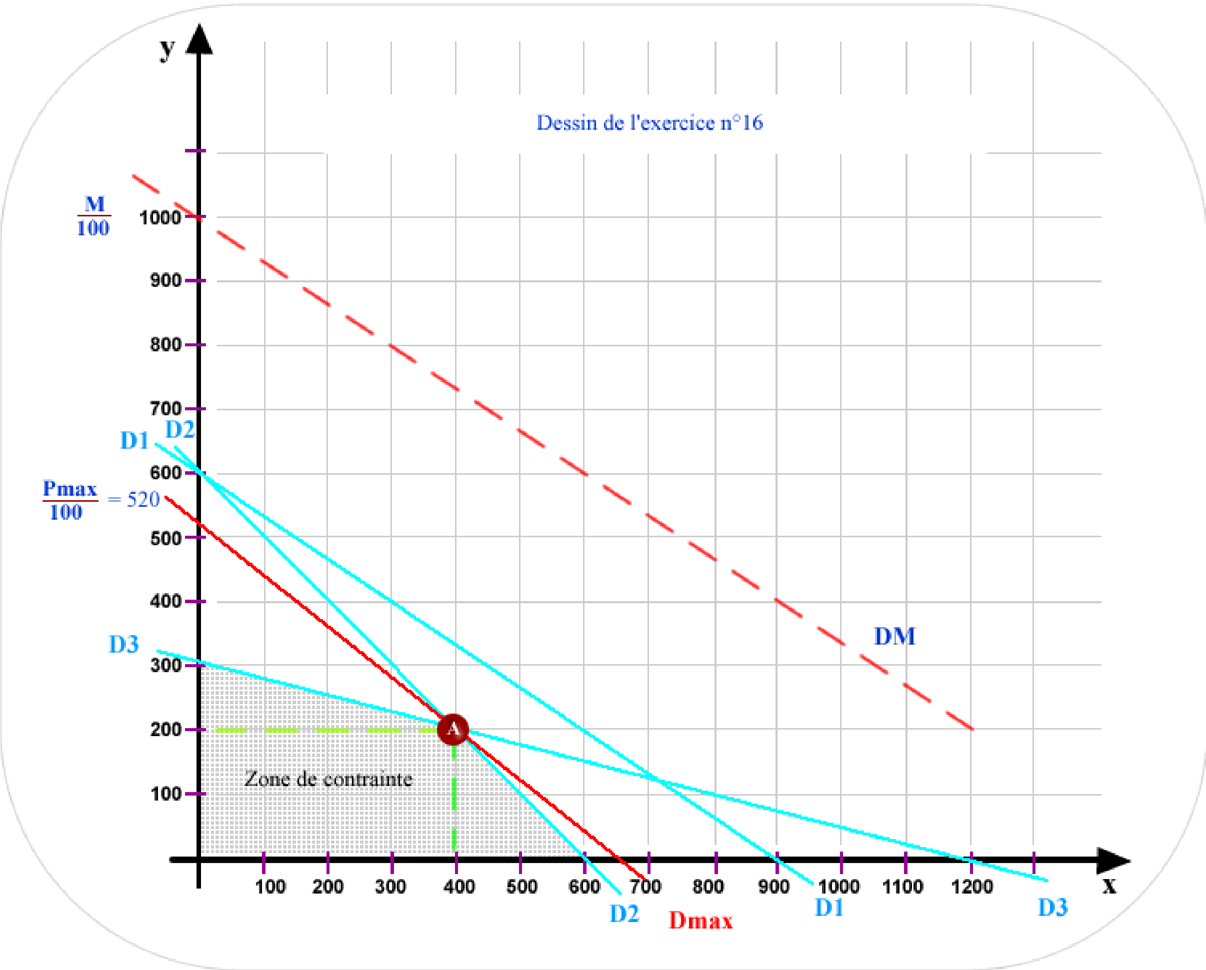
La marge M sera alors M = 25%(320x) + 20%(500y). On veut donc optimiser $M = 80x + 100y$ (ou $\frac{M}{100} = \frac{4}{5}x + y$). La zone de contrainte est la zone grisée, dans le premier quadrant (car $x \geq 0$ et $y \geq 0$) et à l'intersection des trois demi-plans définis par les inégalités si dessus et délimités par les D_1 ($2x + 3y = 1800$), D_2 ($x + y = 600$) et D_3 ($x + 4y = 1200$). On cherche la droite D_M ($4x + 5y = \frac{M}{20}$) située dans cette zone, d'ordonnée à l'origine ($\frac{M}{100}$) maximum (la plus éloignée de 0). La droite cherchée D_{max} (droite rouge) rencontre la zone de contrainte en A(400,200). Le maximum de M est donc atteint pour x = 400 et y = 200 et $M_{max} = 80\times 400 + 100\times 200 = 52\ 000$€

2) Le chiffre d'affaire prévisionnel mensuel sera alors de $320\times 400 + 500\times 200 = 228\ 000$€.

3) Soit x le prix de la minute de M_1, y celui de M_2 et z celui de M_3. Pour P_1 le prix de revient

est 20x + 50y + 40z, et P_1 rapporte 80€. De même le prix de revient de P_2 est 30x + 50y + 40z, et P_2 rapporte 100€. X veut bien sûr minimiser le coût global de l'opération soit rendre

300×60x + 500×60y + 200×60z minimum sous les contraintes $\begin{cases} 20x + 50y + 10z \geq 80 \\ 30x + 50y + 40z \geq 100 \\ x \geq 0 \text{ et } y \geq 0 \text{ et } z \geq 0 \end{cases}$



Exercice 17
Dans une exploitation agricole, on doit choisir entre deux types d'engrais A et B pour fertiliser les terres. Celles-ci requièrent au moins 60 kg de potassium, 120g de calcium et 90g de sodium par hectare.
Dans un paquet d'engrais A, il y a 1 kg de potassium, 3kg de calcium et 3kg de sodium.
Dans un paquet B, il y a 2kg de potassium, 2kg de calcium et 1kg de sodium.
Quelles sont les quantités optimales de A et de B à utiliser par hectare, si le prix des paquets est de 100€ pour A et pour B.

Solution

Soit x le nombre de paquets A et y le nombre de paquets B. On a les contraintes

$$\begin{cases} x + 2y \geq 60 \\ 3x + 2y \geq 120 \\ 3x + y \geq 90 \\ x \in \mathbf{N} \text{ et } y \in \mathbf{N} \end{cases}$$ et on doit minimiser le prix des paquets, $P = 100x + 100y$ (ou $\frac{P}{100} = x + y$).

La zone de contrainte est la zone verte , dans le premier quadrant (car $x \geq 0$ et $y \geq 0$) et à l'intersection des trois demi-plans définis par les inégalités si dessus et délimités par les D_1 ($x + 2y = 60$), D_2 ($3x + 2y = 120$) et D_3 ($3x + y = 90$). On cherche la droite D_P ($x + y = \frac{P}{100}$) située dans cette zone et d'ordonnée à l'origine ($\frac{P}{100}$) minimum. La droite cherchée D_{min} (droite rouge) rencontre la zone de contrainte en A(30,15). Le minimum de P est donc atteint pour x = 30 et y = 15 et
$P_{min} = 100\times30 + 100\times15 = 4500$€ par hectare.