Leçon 03 – Correction Exercez vous N°5

Exercez vous 5
Déterminer les extrema de $f:(x,y) \to x^2 + y^2 -4xy$ sous la contrainte $x^2 + y^2 = 4$.

Solution

Soit le Lagrangien : $L : (x,y,\lambda) \to x^2 + y^2 - 4xy + \lambda(x^2 + y^2 - 4)$.

Conditions du premier ordre : $\begin{cases} L'_x(x,y,\lambda) = 2x - 4y + 2\lambda x = 0 \ (1) \\ L'_y(x,y,\lambda) = 2y - 4x + 2\lambda y = 0 \ (2) \\ x^2 + y^2 = 4. \ (3) \end{cases}$

(1) - (2) donne $(x - y)(6 + 2\lambda) = 0$. Donc $x = y$ ou $\lambda = -3$.

Si $x = y$, (3) donne $x = y = \pm\sqrt{2}$ et (1) donne $\lambda = 1$.
Si $\lambda = -3$, (1) devient $-4x - 4y = 0$ soit $x = -y$ et (3) donne $x = -y = \pm\sqrt{2}$.

Il y a donc à priori 4 extrema possibles, ils correspondent à :
$A(\sqrt{2} ,\sqrt{2})$, $B(-\sqrt{2} , -\sqrt{2})$, $C(\sqrt{2} , -\sqrt{2})$ et $D(-\sqrt{2} ,\sqrt{2})$ (on vérifie que les 3 conditions sont bien vérifiées).

Ces quatre points sont des points stationnaires mais correspondent-ils réellement à des extrema ?

Pour répondre à cette question, il faudrait vérifier les conditions du second ordre. Mais ici nous ferons une **étude locale directe**.

Nous allons étudier $f(x,y)$ au voisinage de (x_0,y_0), (x_0,y_0) étant les valeurs de x et y trouvées à l'aide des conditions du premier ordre.
L'étude du signe de $f(x,y) - f(x_0,y_0)$ pour (x,y) voisin de (x_0,y_0) et vérifiant la contrainte $g(x,y) = 0$, nous permet de conclure. En effet s'il est positif, on aura un minimum en (x_0,y_0), et s'il est négatif on aura un maximum en (x_0,y_0), s'il n'est pas constant, on aura pas d'extremum.

Posons donc $(x,y) = (x_0+h,y_0+k)$ h et k étant donc des réels quelconques voisins de zéro et tels que : $g(x_0+h,y_0+k) = 0$.

Calculons donc :
$f(x_0+h,y_0+k) - f(x_0,y_0) = (x_0+h)^2 + (y_0+k)^2 - 4(x_0+h)(y_0+k) - x_0^2 - y_0^2 + 4x_0y_0$, compte tenu du fait que $(x_0+h)^2 + (y_0+k)^2 = 4$ et $x_0^2+y_0^2 = 4$.
D'où $f(x_0+h,y_0+k) - f(x_0,y_0) = 4 - 4(x_0 + h)(y_0 + k) - 4 + 4x_0y_0$.
On a donc : $f(x_0+h,y_0+k) - f(x_0,y_0) = -4(x_0k + y_0h + hk)$.

Au point A : $f(\sqrt{2} +h,\sqrt{2} +k) - f(\sqrt{2} ,\sqrt{2}) = -4(\sqrt{2}\, k + \sqrt{2}\, h + hk)$
Or compte tenu de la contrainte :
$x_0^2 + 2hx_0 + h^2 + y_0^2 + 2ky_0 + k^2 = 4$ et $x_0^2 + y_0^2 = 4$,

d'où $h^2 + k^2 = -2x_0h - 2y_0k = -2\sqrt{2}\,h - 2\sqrt{2}\,k$.
D'où $f(\sqrt{2}+h,\sqrt{2}+k) - f(\sqrt{2},\sqrt{2}) = 2(h^2 + k^2 - 2hk) = 2(h - k)^2 \geq 0$.
A correspond donc à un minimum.

(Dans tous les exercices d'optimisation avec contrainte, la contrainte permet d'éliminer les termes de degré 1).

Au point B : $f(-\sqrt{2}+h,-\sqrt{2}+k) - f(-\sqrt{2},-\sqrt{2}) = -4(-\sqrt{2}\,k - \sqrt{2}\,h + hk)$.
Or $h^2 + k^2 = 2\sqrt{2}\,h + 2\sqrt{2}\,k$, on obtient donc :
$f(-\sqrt{2}+h,-\sqrt{2}+k) - f(-\sqrt{2},-\sqrt{2}) = 2(h^2 + k^2 + 2hk) = 2(h-k)^2 \geq 0$ et
B correspond donc aussi à un minimum.

Au point C : $f(\sqrt{2}+h,-\sqrt{2}+k) - f(\sqrt{2},-\sqrt{2}) = -4(\sqrt{2}\,k - \sqrt{2}\,h + hk)$
D'après la contrainte : $h^2 + k^2 = -2\sqrt{2}\,h - 2(-\sqrt{2})k$
D'où $f(\sqrt{2}+h,-\sqrt{2}+k) - f(\sqrt{2},-\sqrt{2}) = -2(h^2 + k^2 + 2hk) = -2(h+k)^2 \leq 0$,
C correspond donc à un maximum.

Au point D : $f(-\sqrt{2}+h,\sqrt{2}+k) - f(-\sqrt{2},\sqrt{2}) = -4(-\sqrt{2}\,k + \sqrt{2}\,h + hk) = -2(h+k)^2$ d'après la contrainte. D correspond donc aussi à un maximum.