

Leçon 03 – Correction Exercez vous N°4

Exercez vous 4

Optimiser $f : (x,y,z) \rightarrow xy^2 - 3xy + z^2 - xz$ avec la contrainte $2x + y - z = 0$.

Solution

On a donc $z = 2x + y$ et on est ramené à optimiser $h(x,y)$ tel que :
 $h(x,y) = xy^2 + 2x^2 + y^2$.

Points stationnaires de h : résolvons
$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial x} = y^2 + 4x = 0 \\ \frac{\partial h}{\partial y} = 2xy + 2y = 0. \end{cases}$$

On obtient donc 3 points stationnaires : $(0,0)$, $(-1,2)$ et $(-1,-2)$.

Conditions du second ordre:

$$D(x,y) = \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 4y^2 - 8x - 8.$$

* $D(0,0) = -8$ et $\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = 4 > 0$. $(0,0)$ correspond donc à un minimum de $h(x,y)$ et à un minimum de $f(x,y,z)$ sous la contrainte $2x + y - z = 0$.

* $D(-1,2) = D(-1,-2) > 0$. $(-1,2)$ et $(-1,-2)$ sont donc des points col pour h et pour f sous la contrainte $2x + y - z = 0$.