Leçon 03 – Correction Exercez vous N°3

Exercez vous 3
Soit f : $(x,y,z) \to x^4 - 2x^2 - 2x^2y + 2y^2 + 2y - 2yz - 2z + 2z^2$.
Déterminer les extrema de f.

Solution

(x_0,y_0,z_0) est un point stationnaire si et seulement si :

$$(I)\ \begin{cases} 4x_0^3 - 4x_0 - 4x_0y_0 = 0 \\ -2x_0^2 + 4y_0 + 2 - 2z_0 = 0 \\ -2y_0 - 2 + 4z_0 = 0 \end{cases} \text{, soit } \begin{cases} x_0(x_0^2 - y_0 - 1) = 0\ (1) \\ x_0^2 - 2y_0 + z_0 - 1 = 0\ (2) \\ y_0 + 1 - 2z_0 = 0\ (3) \end{cases}.$$

(1) $\Leftrightarrow$ ($x_0 = 0$ ou $x_0^2 = y_0 + 1$).

Si $x_0 = 0$ (2) et (3) donnent $\begin{cases} -2y_0 + z_0 = 1 \\ y_0 - 2z_0 = -1 \end{cases}$ soit $y_0 = -\frac{1}{3}$ et $z_0 = \frac{1}{3}$

Si $x_0^2 = y_0+1$ (2) et (3) donnent $\begin{cases} -y_0 + z_0 = 0 \\ y_0 - 2z_0 = -1 \end{cases}$ soit $y_0 = z_0 = 1$ et $x_0^2 = 2$ et $x_0 = \pm\sqrt{2}$

On obtient donc 3 points stationnaires : $(0,-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, $(\sqrt{2},1,1)$ et $(-\sqrt{2},1,1)$

Etudions le signe de $\Delta f = f(x_0+h,y_0+k,z_0+t) - f(x_0,y_0,z_0)$ au voisinage de (0,0,0).

*Pour $(x_0,y_0,z_0) = (0,-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, $\Delta f = h^4 - \frac{4}{3}h^2 + 2k^2 - 2kt + 2t^2 - 2h^2k$, soit

$\Delta f = 2(k-\frac{1}{2}t)^2 + \frac{3}{2}t^2 - \frac{4}{3}h^2 + [h^2(h^2-2k)]$. Le crochet est négligeable devant les autres termes d'ordre 2 et $\Delta f \sim 2(k-\frac{1}{2}t)^2 + \frac{3}{2}t^2 - \frac{4}{3}h^2$. (C.f. remarque de l'exercice précédent)

Or dans tout voisinage de (0,0,0), on peut avoir $k = \frac{1}{2}t$, $t = 0$ et $h \neq 0$, alors $\Delta f < 0$. On peut aussi avoir $h = 0$ et $t \neq 0$, alors $\Delta f > 0$. On en déduit donc que Δ change de signe au voisinage de (0,0,0) et donc que $(0,-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ est un point-col.

*Pour $(x_0,y_0,z_0) = (\varepsilon\sqrt{2},1,1)$ avec $\varepsilon = \pm 1$ ($\varepsilon = 1$ correspond à $(\sqrt{2},1,1)$ et $\varepsilon = -1$ correspond à $(-\sqrt{2},1,1)$).

Remarque : Pour une première lecture, on pourra considérer successivement $\varepsilon = 1$, en réécrivant la suite, puis $\varepsilon = -1$.

$\Delta f = 4\varepsilon\sqrt{2}\,h^3 + h^4 + 8h^2 - 4\varepsilon\sqrt{2}\,hk - 2\,kh^2 + 2k^2 + 2t^2 - 2kt$.
$\Delta f = (8h^2 - 4\varepsilon\sqrt{2}\,hk + k^2) + k^2 - 2kt + t^2) + t^2 + [h^2(4\varepsilon\sqrt{2}\,h + h^2)]$. Le crochet est négligeable devant les autres termes de degré 2.
D'où $\Delta f \sim (2\varepsilon\sqrt{2}\,h - k)^2 + (k-t)^2 + t^2 \geq 0$. Donc $(\sqrt{2},1,1)$ et $(-\sqrt{2},1,1)$ correspondent à des minima.