Leçon 03 – Correction Exercez vous N°2

Exercez vous2
Rechercher les extrema de f : $(x,y) \to 3x^3 + xy^2 - xy$.

Solution

f est deux fois différentiable sur $\mathbf{IR}^2$.

Conditions du premier ordre : $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 9x^2 + y^2 - y = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 2xy - x = 0 \end{cases}$.

La deuxième équation donne $x = 0$ ou $y = \dfrac{1}{2}$; on obtient alors les points stationnaires suivants : $A(0,0)$, $B(0,1)$, $C(\dfrac{1}{6}, \dfrac{1}{2})$ et $E(-\dfrac{1}{6}, \dfrac{1}{2})$.

Conditions du second ordre : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 18x$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2y-1$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x$

Soit $D(x,y) = (\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y})^2 - \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} \times \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = (2y-1)^2 - 36x^2$

En A : $D(0,0) = 1 > 0$ et $A(0,0)$ est un point-col

En B : $D(0,1) = 1 > 0$ et $B(0,1)$ est un point-col

En C : $D(\dfrac{1}{6}, \dfrac{1}{2}) = -1$ et $C(\dfrac{1}{6}, \dfrac{1}{2})$ correspond à un extremum de f. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\dfrac{1}{6}, \dfrac{1}{2}) = 3 > 0$ donc C correspond à un minimum de f.

En E : $D(-\dfrac{1}{6}, \dfrac{1}{2}) = -1$ et $E(-\dfrac{1}{6}, \dfrac{1}{2})$ correspond à un extremum de f. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-\dfrac{1}{6}, \dfrac{1}{2}) = -3 < 0$ donc E correspond à un maximum de f.