Leçon 03 – Correction Exercez vous N°1

Exercez vous
Déterminer les points stationnaires de f dans les deux cas suivants :
1) $f(x,y) = \ln(xy) + x^2 - 2y^2 - 4x$;
2) $f(x,y) = e^{xy}(\frac{x}{y} + 1)$.

Solution

1) f est définie sur $\mathbf{D} = \{(x,y)\in \mathbf{IR}^2 ; xy > 0\}$
(1er et 2ème quadrants privés des axes).
Sur **D** f est différentiable et : $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x} + 2x - 4 = \frac{2x^2 - 4x + 1}{x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{y} - 4y = \frac{1-y^2}{y}$

On est donc ramené a résoudre : $\begin{cases} 2x^2 - 4x + 1 = 0 \\ 1 - 4y^2 = 0 \end{cases}$. Soit $\begin{cases} x = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \\ y = \pm \frac{1}{2} \end{cases}$

D'où les 2 points stationnaires : $A(1+\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2})$ et $B(1-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2})$.

En effet $(1+\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2})\in \mathbf{D}$ et $(1-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2})\in \mathbf{D}$.

2) f est définie sur $\mathbf{D} = \{(x,y) ; y\neq 0\}$ ($\mathbf{IR}^2$ privé de l'axe des x)
Sur **D** : $\frac{\partial f}{\partial x} = ye^{xy}(\frac{x}{y} + 1) + \frac{1}{y}e^{xy} = \frac{e^{xy}}{y}(xy + y^2 + 1)$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = xe^{xy}(\frac{x}{y} + 1) - \frac{x}{y^2}e^{xy}$

Soit $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{xe^{xy}}{y^2}(xy + y^2 - 1)$. Un point de coordonnées (x,y) sera stationnaire ssi :

$\begin{cases} xy + y^2 + 1 = 0 \ (1) \\ x(xy + y^2 - 1) = 0 \ (2) \end{cases}$. x = 0 n'est pas solution de (1) donc :

$\begin{cases} xy + y^2 = -1 \\ xy + y^2 = 1 \end{cases}$ ce qui est impossible. f n'a donc pas de points stationnaires.