Leçon 02 – Exercices

Exercice 1
Calculer les dérivées partielles premières des fonctions suivantes après avoir précisé l'ensemble sur lequel le calcul est possible :

1) $f(x,y) = \dfrac{x^2 - xy}{xy^2}$ 2) $f(x,y) = \sqrt{x^2y - 2xy + 3}$ 3) $f(x,y) = \ln(x + \sqrt{x + y^2})$

4) $f(x,y) = x^2\exp(\dfrac{xy}{y+1})$.

Solution

1) f admet des dérivées partielles premières sur $\mathcal{D} = \{(x,y)\in \mathbf{R}^2 \text{ ; } x\neq 0 \textbf{ et } y\neq 0\}$

Sur $\mathcal{D}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{1}{y^2}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{y - 2x}{y^3}$ (pour faire ce calcul on pourra remarquer que $f(x,y) = \dfrac{x}{y^2} - \dfrac{1}{y}$)

2) f admet des dérivées partielles premières sur $\mathcal{D} = \{(x,y)\in \mathbf{R}^2 \text{ ; } x^2y - 2xy + 3 > 0\}$

Sur $\mathcal{D}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{xy - y}{\sqrt{x^2y - 2xy + 3}}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{x^2 - 2x}{2\sqrt{x^2y - 2xy + 3}}$.

3) f admet des dérivées partielles premières sur $\mathcal{D} = \{(x,y)\in \mathbf{R}^2 \text{ ; } x + y^2 > 0 \text{ et } x + \sqrt{x + y^2} > 0\}$.

Sur $\mathcal{D}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{1 + \dfrac{1}{2\sqrt{x + y^2}}}{x + \sqrt{x + y^2}} = \dfrac{1/2 + \sqrt{x + y^2}}{x + y^2 + x\sqrt{x + y^2}}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\dfrac{y}{\sqrt{x + y^2}}}{x + \sqrt{x + y^2}} = \dfrac{y}{x + y^2 + x\sqrt{x + y^2}}$

4) f admet des dérivées partielles premières sur $\mathcal{D} = \{(x,y)\in \mathbf{R}^2 \text{ ; } y\neq -1\}$.

Sur $\mathcal{D}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x\exp(\dfrac{xy}{y+1}) + \dfrac{x^2 y}{y+1}\exp(\dfrac{xy}{y+1})$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{x^3}{(y+1)^2}\exp(\dfrac{xy}{y+1})$.

Exercice 2
Ecrire les différentielles df des fonctions f définies par les expressions suivantes, après avoir précisé l'ensemble des couples (x,y) pour lesquels le calcul est possible :

1) $f(x,y) = x^2 + xy^2$ 2) $f(x,y) = \dfrac{x^3y}{x - y + 1}$ 3) $f(x,y) = x\exp(1 + \dfrac{x}{y})$

4) $f(x,y) = \dfrac{\ln(x^2 + y^2)}{x+1}$

Solution

1) Sur $\mathbf{IR}^2$: $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x + y^2$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2xy$. Donc $df = (2x + y^2)dx + 2xydy$.

2)f est différentiable sur $\mathcal{D} = \{(x,y)\in \mathbf{IR}^2 \ ; x - y + 1 \neq 0\}$.

Sur $\mathcal{D}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{2x^3y - 3x^2y^2 + 3x^2y}{(x - y + 1)^2}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{x^4 + x^3}{(x - y + 1)^2}$, d'où

$df = \dfrac{2x^3y - 3x^2y^2 + 3x^2y}{(x - y + 1)^2}\,dx + \dfrac{x^4 + x^3}{(x - y + 1)^2}\,dy.$

3) f est différentiable sur $\mathcal{D} = \{(x,y)\in \mathbf{IR}^2 \ ; y \neq 0\}$.

Sur $\mathcal{D}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \exp(1 + \dfrac{x}{y}) + \dfrac{x}{y}\exp(1 + \dfrac{x}{y})$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{-x^2}{y^2}\exp(1 + \dfrac{x}{y})$, d'où

$df = \exp(1 + \dfrac{x}{y}) + \dfrac{x}{y}\exp(1 + \dfrac{x}{y})dx + \dfrac{-x^2}{y^2}\exp(1 + \dfrac{x}{y})dy.$

4) f est différentiable sur $\mathcal{D} = \{(x,y)\in \mathbf{IR}^2 \ ; x \neq -1 \text{ et } (x,y) \neq (0,0)\}$.

Sur $\mathcal{D}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{2x(x + 1) - (x^2 + y^2)\ln(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)(x + 1)^2}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{2y}{(x^2 + y^2)(x + 1)}$, d'où

$df = \dfrac{2x(x + 1) - (x^2 + y^2)\ln(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)(x + 1)^2}\,dx + \dfrac{2y}{(x^2 + y^2)(x + 1)}\,dy.$

Exercice 3

Déterminer le développement limité de f à l'ordre 2 et au voisinage de (x_0,y_0) dans les cas suivants :

1) $f(x,y) = \sqrt{xy + 2x - y - 1}$ et $(x_0,y_0) = (1,-1)$;

2) $f(x,y) = \dfrac{\ln(2 + x^2 - 2x + y)}{x^2y - 2xy + y + x - 2}$ et $(x_0,y_0) = (1,0)$.

Rappel : pour **x voisin de zéro.**

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + x^n\,\varepsilon(x)$$

$$(1 + x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}\,x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}\,x^n + x^n\,\varepsilon(x) \quad (m\in \mathbf{R})$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + x^n\,\varepsilon(x)$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + x^n\,\varepsilon(x)$$

Solution

1) Posons $x = 1 + h$ et $y = -1 + k$. $f(x,y) = f(1 + h,-1 + k) = \sqrt{1 + (hk + h)}$.
(x,y) est voisin de (1,-1) si et seulement si (h,k) est voisin de (0,0).

Donc hk + h est voisin de 0 et en utilisant le deuxième DL avec $m = \dfrac{1}{2}$, on a

$\sqrt{1 + (hk + h)} = 1 + \dfrac{1}{2}(hk + h) - \dfrac{1}{8}(hk + h)^2 + (h^2 + k^2)\varepsilon(h,k)$ (avec $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon(h,k) = 0$).

En ne gardant dans la partie régulière que les termes de degré inférieur ou égal à 2 :

$f(1 + h,-1 + k) = 1 + \dfrac{1}{2}h + \dfrac{1}{2}hk - \dfrac{1}{8}h^2 + (h^2 + k^2)\,\varepsilon(h,k).$

2) Posons $x = 1 + h$. $f(x,y) = f(1 + h,y) = \dfrac{\ln(1 + (y + h^2))}{-1 + (h + h^2y)}$ et (x,y) est voisin de $(1,0)$ si et seulement si (h,y) est voisin de $(0,0)$.
$y + h^2$ et $h + h^2y$ sont donc voisins de 0 et en utilisant le troisième DL,
$\ln(1 + (y + h^2)) = y + h^2 - \frac{1}{2}(y + h^2)^2 + (h^2 + y^2)\varepsilon(h,y)$ (avec $\lim\limits_{(h,y)\to(0,0)} \varepsilon(h,y) = 0$).
En ne gardant dans la partie régulière que les termes de degré inférieur ou égal à 2 :
$\ln(1 + (y + h^2)) = y + h^2 - \frac{1}{2}y^2 + (h^2 + y^2)\,\varepsilon(h,y)$ (1).
En utilisant le premier DL :
$\dfrac{1}{-1 + (h + h^2y)} = -\dfrac{1}{1 - (h + h^2y)} = -(1 + (h + h^2y) + (h + h^2y)^2 + (h^2 + y^2)\varepsilon(h,y))$
(avec $\lim\limits_{(h,y)\to(0,0)} \varepsilon(h,y) = 0$).
En ne gardant dans la partie régulière que les termes de degré inférieur ou égal à 2 :
$\dfrac{1}{-1 + (h + h^2y)} = -1 - h - h^2 + (h^2 + y^2)\varepsilon(h,y)$ (2).
En faisant le produit des deux DL (1) et (2) on obtient:
$f(1 + h,y) = -y - hy - h^2 + \frac{1}{2}y^2 + (h^2 + y^2)\varepsilon(h,y)$.

Exercice 4
Calculer les dérivées partielles secondes des fonctions suivantes :
1) $(x,y,z) \to 3xy^2 - x^3z^2 + xyz - 1$ 2) $(x,y,z) \to (x + y)\exp(\frac{y}{x + z})$
3) $(x,y,z) \to \frac{x}{z}\ \ln y^2$.

Solution

1) Sur $\mathbf{IR^2}$: $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 3y^2 - 3x^2z^2 + yz$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 6xy + xz$ et $\dfrac{\partial f}{\partial z} = -2x^3z + xy$
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -6xz^2$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = 6y + z$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial z} = -6x^2z + y$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6x$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial z} = x$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2} = -2x^3$.

2) Sur $\mathcal{D} = \{(x,y,z))\in \mathbf{IR^3}\ ;\ x + z \neq 0\}$: $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \exp(\frac{y}{x + z}) - \dfrac{y(x + y)}{(x + z)^2}\exp(\frac{y}{x + z})$,
$\dfrac{\partial f}{\partial y} = \exp(\frac{y}{x + z}) + \dfrac{x + y}{x + z}\exp(\frac{y}{x + z})$ et $\dfrac{\partial f}{\partial z} = -\dfrac{y(x + y)}{(x + z)^2}\exp(\frac{y}{x + z})$.
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\dfrac{y}{(x + z)^2}\exp(\frac{y}{x + z}) + \dfrac{y(x + 2y - z)}{(x + z)^3}\exp(\frac{y}{x + z}) + \dfrac{y^2(x + y)}{(x + z)^4}\exp(\frac{y}{x + z})$,
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \dfrac{1}{x + z}\exp(\frac{y}{x + z}) - \dfrac{x + 2y}{(x + z)^2}\exp(\frac{y}{x + z}) - \dfrac{y(x + y)}{(x + z)^3}\exp(\frac{y}{x + z})$,
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial z} = -\dfrac{y}{(x + z)^2}\exp(\frac{y}{x + z}) + \dfrac{2y(x + y)}{(x + z)^3}\exp(\frac{y}{x + z}) + \dfrac{y(x + y)}{(x + z)^4}\exp(\frac{y}{x + z})$,
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \dfrac{2}{(x + z)}\exp(\frac{y}{x + z}) + \dfrac{x + y}{(x + z)^2}\exp(\frac{y}{x + z})$,

$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = -\frac{y}{(x+z)^2}\exp(\frac{y}{x+z}) - \frac{x+y}{(x+z)^2}\exp(\frac{y}{x+z}) - \frac{x+y}{(x+z)^3}\exp(\frac{y}{x+z})$ et

$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{2y(x+y)}{(x+z)^3}\exp(\frac{y}{x+z}) + \frac{y^2(x+y)}{(x+z)^4}\exp(\frac{y}{x+z})$.

3) Sur $\mathcal{D} = \{(x,y,z)) \in \mathbf{IR}^3 \text{ ; } y \neq 0 \text{ et } z \neq 0\}$: $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{z}\ln y^2$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2x}{yz}$ et $\frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{x}{z^2}\ln y^2$.

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{2}{yz}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \frac{-1}{z^2}\ln y^2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{-2x}{y^2 z}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \frac{-2x}{yz^2}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{2x}{z^3}\ln y^2$.

Exercice 5

Soit $F(x,y) = e^{xy} - x^3 + y$. Montrer qu'au voisinage de (1,0), $F(x,y) = 0$ définit y comme fonction implicite de x. Calculer $\frac{dy}{dx}(1)$.

Solution

Remarquons d'abord que $F(1,0) = 1 - 0 + 1 = 0$. D'autre part F est continue, admet des dérivées partielles $\frac{\partial F}{\partial x} = ye^{xy} - 3x^2$ et $\frac{\partial F}{\partial y} = xe^{xy} + 1$ qui sont continues et $\frac{\partial F}{\partial y}(1,0) = 2 \neq 0$.Donc d'après le théorème des fonctions implicites, $F(x,y) = 0$ définit bien y comme fonction implicite de x. De plus $\frac{dy}{dx}(1) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(1,0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(1,0)} = -\frac{-3}{2} = \frac{3}{2}$.

Exercice 6

Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}^2$ par $f(x,y) = \frac{\ln(x^2 + y^2)}{xy + 1}$

1) Préciser ensemble sur lequel f est différentiable (faire un dessin rapide).

2) La relation $f(x,y) - 2 = 0$ définit-elle, au voisinage de (0,e), une fonction ϕ telle que $y = \phi(x)$? (Citer le théorème utilisé)

3) Calculer $\phi'(0)$.

Solution

1) f est différentiable sur $\mathcal{D} = \{(x,y)) \in \mathbf{IR}^2 \text{ ; } xy + 1 \neq 0 \text{ et } (x,y) \neq (0,0)\}$ ($\mathbf{IR}^2$ privé de (0,0) et de l'hyperbole croissante d'équation $y = -\frac{1}{x}$, de centre (0,0) et d'asymptotes $x = 0$ et $y = 0$).

2) Remarquons d'abord que $f(0,e) - 2 = \frac{2}{1} - 2 = 0$. D'autre part f est continue sur $\mathcal{D}$, donc sur un voisinage de (0,e), y admet des dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\frac{2x}{x^2 + y^2}(xy + 1) - y\ln(x^2 + y^2)}{(xy + 1)^2}$ et

$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\frac{2y}{x^2+y^2}(xy+1) - x\ln(x^2+y^2)}{(xy+1)^2}$ qui sont continues sur $\mathcal{D}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,e) = \frac{2}{e} \neq 0$.Donc d'après le théorème des fonctions implicites, f(x,y) - 2 = 0 définit bien y comme fonction implicite de x, soit ϕ cette fonction. On a $\phi'(0) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,e)}{\frac{\partial f}{\partial y}(0,e)} = -\frac{-2e}{2/e} = e^2$.

Exercice 7

1) Soit f, une fonction homogène de degré 1 et deux fois continûment différentiable.
Ecrire la formule d'Euler. En déduire que :

(1) $x\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0.$

(on pourra dériver partiellement par rapport à x la formule d'Euler)

Trouver une formule analogue liant $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$. Montrer alors que

(2) $x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

2) Soit $f(x,y) = \frac{xy\ln(\frac{x}{y}+1)}{x+y}$.

Déterminer l'ensemble des (x,y) pour lesquels f est deux fois continûment différentiable (faire un dessin). Montrer que f est homogène et déterminer son degré d'homogénéité. Vérifier (1) et (2).

Solution

1) Le relation d'Euler s'écrit : $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = f(x,y)$ (3).

Dérivons (3) partiellement par rapport à x : $\frac{\partial f}{\partial x} + x\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}$. D'où la relation (1).

Dérivons (3) partiellement par rapport à y : $x\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial f}{\partial y} + y\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial f}{\partial y}$.

D'où $x\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ (4).

Or $x \times (1) - y \times (4)$ donne : $x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + xy\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} - xy\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$. Or f est deux fois continûment différentiable donc d'après le théorème de symétrie de Schwarz : $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et (2) est vérifiée.

2) f est définie et continûment différentiable sur $\mathcal{D} = \{(x,y)) \in \mathbf{R}^2 ;\ \frac{x}{y} + 1 > 0 \text{ et } x + y \neq 0\}$ (réunion des deux sections planes sans leur frontière, d'équation (x > -y et y > 0) d'une part et (x < -y et y < 0) d'autre part).

Sur $\mathcal{D}$, pour tout $a \neq 0$, $f(ax,ay) = \dfrac{a^2xy\ln(\frac{ax}{ay}+1)}{ax+ay} = a\,f(x,y)$. Ainsi f est homogène de degré 1.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y^2\ln(\frac{x}{y}+1) + xy}{(x+y)^2},\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^2\ln(\frac{x}{y}+1) - x^2}{(x+y)^2},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = y\,\frac{2y - x - 2y\ln(\frac{x}{y}+1)}{(x+y)^3}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{-\frac{x^3}{y} - 2x^2\ln(\frac{x}{y}+1) + 2x^2}{(x+y)^3} \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{2xy\ln(\frac{x}{y}+1) + x^2 - 2xy}{(x+y)^3}$$

. On vérifie alors (1) et (2).

Exercice 8

Soit f une fonction de $\mathbf{R}^3$ dans $\mathbf{R}$ définie par $f(x,y,z) = x^3\ln\dfrac{x^2+y^2}{z^2}$.

1) Donner l'ensemble de définition de f et l'ensemble sur lequel f admet des dérivées partielles d'ordre 1.

2) Montrer que f est homogène et préciser son degré d'homogénéité.

3) Calculer les dérivées partielles de f d'ordre 1 et vérifier la relation d'Euler.

Solution

1) f est définie et différentiable sur $\mathcal{D} = \{(x,y,z)) \in \mathbf{R}^3 ;\ (x,y) \neq (0,0) \text{ et } z \neq 0\}$

2) Sur $\mathcal{D}$ et pour $a \in \mathbf{R}^*$, $f(ax,ay,az) = a^3x^3\ln\dfrac{a^2x2 + a^2y2}{a^2z2} = a^3\,f(x,y,z)$, et f est homogène de degré 3.

3) Sur $\mathcal{D}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 3x^2\ln\dfrac{x^2+y^2}{z^2} + \dfrac{2x^4}{x^2+y^2}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{2yx^3}{x^2+y^2}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial z} = \dfrac{-2x^3}{z}$.

Et $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} + z\dfrac{\partial f}{\partial z} = 3x^3\ln\dfrac{x^2+y^2}{z^2} + \dfrac{2x^5}{x^2+y^2} + \dfrac{2y^2x^3}{x^2+y^2} - 2x^3$,

$x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} + z\dfrac{\partial f}{\partial z} = 3x^3\ln\dfrac{x^2+y^2}{z^2} + \dfrac{2x^3(x^2+y^2)}{x2+y^2} - 2x^3 = 3\,f(x,y,z)$. La relation d'Euler est bien vérifiée.

Exercice 9

La fonction de Coog-Douglas :

Soit $f : (L,K) \to Q = K^{\alpha}L^{1-\alpha}$ $(0 < \alpha < 1)$

1) Calculer le taux marginal de substitution T de f .

2) En déduire l'élasticité de substitution σ de f .

Solution

1) $T = \left|\frac{dK}{dL}\right| = \left|\frac{\frac{\partial f}{\partial L}}{\frac{\partial f}{\partial K}}\right| = \frac{(1-\alpha)K^{\alpha}L^{-\alpha}}{\alpha K^{\alpha-1}L^{1-\alpha}} = \frac{1-\alpha}{\alpha} \times \frac{K}{L}$.

2) $\sigma = \frac{d(K/L)}{K/L} \times \frac{1}{dT/T} = \frac{d(K/L)}{dT} \times \frac{T}{K/L}$. Or d'après la question précédente,

$\frac{K}{L} = \frac{\alpha}{1-\alpha}T$, donc $\frac{d(K/L)}{dT} = \frac{\alpha}{1-\alpha}$ et $\frac{T}{K/L} = \frac{1-\alpha}{\alpha}$. D'où $\sigma = 1$.

Remarque : Dans ce cadre $\frac{K}{L}$ est proportionnel à T, c'est un cas simple.

Exercice 10

La fonction de production C.E.S

Soit $f : (L,K) \to Q = A[\alpha K^{-\gamma} + (1-\alpha)L^{-\gamma}]^{-1/\gamma}$ $(A > 0 , \gamma > -1$ et $0 < \alpha < 1)$

1) Calculer le taux marginal de substitution T de f .

2) En déduire l'élasticité de substitution σ de f .

Solution

1) $T = \left|\frac{\frac{\partial f}{\partial L}}{\frac{\partial f}{\partial K}}\right| = \left|\frac{-(1-\alpha)\gamma L^{-\gamma-1}(\alpha K^{-\gamma} + (1-\alpha)L^{-\gamma})^{-1/\gamma-1}}{-\alpha\,\gamma K^{-\gamma-1}(\alpha K^{-\gamma} + (1-\alpha)L^{-\gamma})^{-1/\gamma-1}}\right| = \frac{1-\alpha}{\alpha} \times \frac{L^{-\gamma-1}}{K^{-\gamma-1}} = \frac{1-\alpha}{\alpha}\left(\frac{K}{L}\right)^{\gamma+1}$.

2) $\sigma = \frac{d(K/L)}{dT} \times \frac{T}{K/L}$. Or ici $\frac{K}{L} = \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}T\right)^{1/\gamma+1}$ et

$\frac{d(K/L)}{dT} = \frac{\alpha}{1-\alpha} \times \frac{1}{\gamma+1}\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}T\right)^{(1/\gamma+1)-1} \cdot \frac{T}{K/L} = T\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}T\right)^{-1/\gamma+1}$.

D'où $\sigma = \frac{\alpha}{1-\alpha} \times \frac{1}{\gamma+1}\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}T\right)^{-1} \times T = \frac{1}{\gamma+1}$. σ est donc constant d'où le nom de ces fonctions (C.E.S = constant elasticity subtitution).