Leçon 02 – Correction des "Exercez-vous"

Exercez vous 7

Les fonctions suivantes sont-elles homogènes ? Si oui, déterminer leur degré d'homogénéité :

1) Soit $f : (x,y) \to x^2 - xy + y^2$; 2) $f : (x,y) \to \frac{x}{y}$; 3) $f : (x,y) \to \sqrt{x+y}$;

4) $f : (x, y, z) \to x\ln\frac{z}{y}$; 5) $f : (x,y) \in \mathbf{R}^{+*} \times \mathbf{R}^{+*} \to 3x^\alpha y^\beta$ ($\alpha \in \mathbf{R}$ et $\beta \in \mathbf{R}$).

Solution

1) $f(ax,ay) = (ax)^2 - ax.ay + (ay)^2 = a^2 f(x,y)$. f est donc homogène de degré 2 .

C'est un cas particulier des polynômes homogènes de degré n :
$P_n(x,y) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}y + a_{n-2}x^{n-2}y^2 \dots + a_1 xy^{n-1} + a_o y^n$
(chaque monôme est de degré total n)

2) $f : (x,y) \to \frac{x}{y}$ est homogène de degré 0 puisque $\frac{ax}{ay} = a^0\frac{x}{y}$ $(a \neq 0)$

3) f est définie sur $\mathbf{D} = \{(x,y) / x+y \geq 0\}$. $\forall a \in \mathbf{IR}^+$ et $\forall (x,y) \in \mathbf{D}$:
$f(ax,ay) = \sqrt{ax+ay} = \sqrt{a}\sqrt{x+y}$ ainsi f est homogène de degré $\frac{1}{2}$.

4) f est définie sur $\mathbf{D} = \{(xy,z) / zy > 0\}$. $\forall a \in \mathbf{IR}^*$ et $\forall (x,y,z) \in \mathbf{D}$:
$f(ax,ay,az) = ax\ln\frac{az}{ay} = ax\ln\frac{z}{y}$ et f est homogène de degré 1.

5) $\forall a \in \mathbf{IR}^{+*}$: $f(ax,ay) = 3(ax)^\alpha(ay)^\beta = 3a^{\alpha+\beta}x^\alpha y^\beta$. Et f est homogène de degré $\alpha+\beta$.