Leçon 02 – Correction des "Exercez-vous"

Exercez vous 5

1) Soit l'équation $F(x,y) = x^3 - 2xy + 3y^2 - 9 = 0$.

Montrer qu'il existe $f : x \rightarrow y$ au voisinage du point (1,2) et calculer f'(1).

2) Soit $F : (x,y) \rightarrow \cos y + x - \frac{1}{2}$. Considérons F(x,y) au voisinage de $(1,\frac{2\pi}{3})$.

Existe-t-il $f:x \rightarrow y$ définie et dérivable au voisinage de 1, telle que F(x,f(x)) = 0?

Si oui calculer f'(1).

Solution

1) F a des dérivées partielles : $F'_x(x,y) = 3x^2-2y$ et $F'_y = -2x+6y$ celles-ci sont continues sur $\mathbb{R}^2$ et $F'_y(1,2) \neq 0$ donc le théorème s'applique et f existe et est unique et $f'(1) = -\frac{F'_x}{F'_y}(1,2)$.

$$-\frac{F'_x}{F'_y}(x,y) = -\frac{3x^2-2y}{-2x+6y} \quad \text{et} \quad f'(1) = \frac{1}{10}$$

2)F admet des dérivées partielles continues au voisinage de $(1,\frac{2\pi}{3})$.

Et $\frac{\partial F}{\partial x}(1,\frac{2\pi}{3}) = 1$, $\frac{\partial F}{\partial y}(1,\frac{2\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ donc le théorème du cours s'applique et il existe un voisinage de 1 sur lequel f existe et est dérivable.

De plus $f'(1) = -\frac{1}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.