Leçon 02 – Correction des "Exercez-vous"

Exercez vous 4
1) Trouver le D.L. à l'ordre 2 et au point (1,1) de f : $(x,y)\to\ln(1+xy)$.
2) Donner une développement limité d'ordre 2 de $f(x,y) = (x+1)e^{(x+y)}$ au voisinage de (-1,1) .
En déduire une valeur approchée de $(x+1)e^{(x+y)}$ pour
x =-1.05 et y = 1.01.

Solution

1) Au voisinage de (1,1) f est différentiable :

Première méthode :

$f'_x(x,y) = \dfrac{y}{1+xy}$ $\quad f'_y(x,y) = \dfrac{x}{1+xy}$ $\quad f''_{xx}(x,y) = \dfrac{-y^2}{(1+xy)^2}$

$f''_{xy}(x,y) = \dfrac{(1+xy) - xy}{(1+xy)^2} = \dfrac{1}{(1+xy)^2}$ $\quad f''_{yy}(x,y) = \dfrac{-x^2}{(1+xy)^2}$.

La formule de Taylor donne :

$$\ln(1+xy) = \ln 2 + (x-1)\frac{1}{2} + (y-1)\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left[(x-1)^2(-\frac{1}{4}) + 2(x-1)(y-1)(\frac{1}{4}) + (y-1)^2(-\frac{1}{4})\right] + ((x-1)^2+(y-1)^2)\varepsilon(x-1,y-1)$$

Deuxième méthode

On peut utiliser une technique similaire à celle qui à été mise en place pour les fonctions à une variable.

On se ramène d'abord à un voisinage de (0,0) en posant :
x = 1 + h et y = 1 + k. (x,y) voisin de (1,1) équivaut à (h,k) voisin de (0,0).

$$f(x,y) = \ln(2 + h + k + hk) = \ln[2(1 + \frac{h + k + hk}{2})]$$

$$\ln(2 + h + k + hk) = \ln 2 + \ln(1 + \frac{h + k + hk}{2})$$

h et k étant voisins de 0, $\dfrac{h + k + hk}{2}$ l'est et on appliquer la formule donnant le D.L. de $\ln(1 + x)$ pour x voisin de 0.

$$\ln(2 + h + k + hk) = \ln 2 + \frac{h+k+hk}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{h+k+hk}{2}\right)^2 + \left(\frac{h+k+hk}{2}\right)^2\varepsilon(h,k)$$

où $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon(h,k) = 0$

Soit en ordonnant : $f(x,y) = \ln 2 + \dfrac{h}{2} + \dfrac{k}{2} - \dfrac{h^2}{8} - \dfrac{k^2}{8} + \dfrac{hk}{4} + (h^2 + k^2)\varepsilon(h,k)$

Le changement de variables x = 1+h , y = 1+k donne bien le résultat obtenu par la première méthode.

2) **Première méthode** :
$f(-1,1) = 0$, $f'_x(x,y) = e^{(x+y)} + (x+1)e^{(x+y)}$ et $f'_x(-1,1) = 1$;
$f'_y(x,y) = (x+1)e^{(x+y)}$ et $f'_y(-1,1) = 0$
$f''_{xx}(x,y) = 2e^{(x+y)} + (x+1)e^{(x+y)}$ et $f''_{xx}(-1,1) = 2$
$f''_{xy}(x,y) = e^{(x+y)} + (x+1)e^{(x+y)}$ et $f''_{xy}(x,y) = 1$
$f''_{yy}(x,y) = (x+1)e^{(x+y)}$ et $f''_{yy}(-1,1) = 0$.

Et on obtient le D.L. suivant :

$$f(x,y) = (x+1) + \frac{1}{2}[(x+1)^2(2) + 2(x+1)(y-1)] + [(x+1)^2 + (y-1)^2]\,\varepsilon(x,y)$$

$$\text{avec} \lim_{(x,y)\to(-1,1)} \varepsilon(x,y) = 0$$

Deuxième méthode :
On se ramène à un voisinage de (0,0) en posant x = -1 + h et y = 1 + k.
Donc si (x,y) est voisin de (-1,1), (h,k) est voisin de (0,0).

$f(x,y) = h\,e^{(-1+h+1+k)} = h\,e^{h+k}$. Or h+k est voisin de 0 pour (h,k) voisin de (0,0). On peut donc utiliser le D.L. de e^x au voisinage de 0, on obtient:

$$f(x,y) = h[1 + (h+k) + \frac{(h+k)^2}{2} + (h+k)^2\varepsilon(h,k)] \text{ avec } \lim_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon(h,k) = 0$$

Soit $f(x,y) = h + h^2 + hk + (h^2 + k^2)\varepsilon(h,k)$.
Et en remplaçant h par x+1 et k par y-1, on retrouve le résultat précédent.

Pour x=-1.05 et y=1.01, on obtient : $f(-1.05,1.01) \approx -0.05 + (0.05)2 - 0.05\times 0.01$
$f(-1.05,1.01) \approx -0{,}0480$.