Leçon 02 – Exercices

Exercice 1
Calculer les dérivées partielles premières des fonctions suivantes après avoir précisé l'ensemble sur lequel le calcul est possible :

1) $f(x,y) = \dfrac{x^2 - xy}{xy^2}$ 2) $f(x,y) = \sqrt{x^2y - 2xy + 3}$ 3) $f(x,y) = \ln(x + \sqrt{x + y^2})$

4) $f(x,y) = x^2\exp(\dfrac{xy}{y + 1})$.

Exercice 2
Ecrire les différentielles df des fonctions f définies par les expressions suivantes, après avoir précisé l'ensemble des couples (x,y) pour lesquels le calcul est possible :

1) $f(x,y) = x^2 + xy^2$ 2) $f(x,y) = \dfrac{x^3y}{x - y + 1}$ 3) $f(x,y) = x\exp(1 + \dfrac{x}{y})$

4) $f(x,y) = \dfrac{\ln(x^2 + y^2)}{x+1}$

Exercice 3
Déterminer le développement limité de f à l'ordre 2 et au voisinage de (x_0,y_0) dans les cas suivants :

1) $f(x,y) = \sqrt{xy + 2x - y - 1}$ et $(x_0,y_0) = (1,-1)$;

2) $f(x,y) = \dfrac{\ln(2 + x^2 - 2x + y)}{x^2y - 2xy + y + x - 2}$ et $(x_0,y_0) = (1,0)$.

Rappel : pour **x voisin de zéro.**

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + x^n\,\varepsilon(x)$$

$$(1 + x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n + x^n\,\varepsilon(x) \quad (m\in \mathbf{R})$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + x^n\,\varepsilon(x)$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + x^n\,\varepsilon(x)$$

Exercice 4
Calculer les dérivées partielles secondes des fonctions suivantes :

1) $(x,y,z) \to 3xy^2 - x^3z^2 + xyz - 1$

---

2) $(x,y,z) \to (x+y)\exp(\frac{y}{x+z})$

3) $(x,y,z) \to \frac{x}{z}\ \ln y^2$.

Exercice 5
Soit $F(x,y) = e^{xy} - x^3 + y$. Montrer qu'au voisinage de $(1,0)$, $F(x,y) = 0$ définit y comme fonction implicite de x. Calculer $\frac{dy}{dx}(1)$.

Exercice 6
Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}^2$ par $f(x,y) = \frac{\ln(x^2+y^2)}{xy+1}$

1) Préciser ensemble sur lequel f est différentiable (faire un dessin rapide).
2) La relation $f(x,y) - 2 = 0$ définit-elle, au voisinage de $(0,e)$, une fonction ϕ telle que $y = \phi(x)$? (Citer le théorème utilisé)
3) Calculer $\phi'(0)$.

Exercice 7
1) Soit f, une fonction homogène de degré 1 et deux fois continûment différentiable.
Ecrire la formule d'Euler. En déduire que :

(1) $\quad x\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0.$

(on pourra dériver partiellement par rapport à x la formule d'Euler)
Trouver une formule analogue liant $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$. Montrer alors que

(2) $\quad x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

2) Soit $f(x,y) = \frac{xy\ln(\frac{x}{y}+1)}{x+y}$.

Déterminer l'ensemble des (x,y) pour lesquels f est deux fois continûment différentiable (faire un dessin). Montrer que f est homogène et déterminer son degré d'homogénéité. Vérifier (1) et (2).

Exercice 8
Soit f une fonction de $\mathbf{R}^3$ dans $\mathbf{R}$ définie par $f(x,y,z) = x^3 \ln\frac{x^2+y^2}{z^2}$.

1) Donner l'ensemble de définition de f et l'ensemble sur lequel f admet des dérivées partielles d'ordre 1.
2) Montrer que f est homogène et préciser son degré d'homogénéité.
3) Calculer les dérivées partielles de f d'ordre 1 et vérifier la relation d'Euler.

Exercice 9

La fonction de Coog-Douglas :

Soit f : (L,K) $\rightarrow$ Q = $K^{\alpha}L^{1-\alpha}$ ($0 < \alpha < 1$)

1) Calculer le taux marginal de substitution T de f .

2) En déduire l'élasticité de substitution σ de f .

Exercice 10

La fonction de production C.E.S

Soit f : (L,K) $\rightarrow$ Q = $A[\alpha K^{-\gamma} + (1-\alpha)L^{-\gamma}]^{-1/\gamma}$ ($A > 0$, $\gamma > -1$ et $0 < \alpha < 1$)

1) Calculer le taux marginal de substitution T de f .

2) En déduire l'élasticité de substitution σ de f .