Leçon 02 – Cours : Fonctions à plusieurs variables

- -

Objectif :
Cette leçon a pour but de fournir les principaux outils nécessaires à l'étude des fonctions à plusieurs variables (parmi lesquels les dérivées partielles, les différentielles …). L'emploi de ces outils est récurrent dans le domaine des sciences économiques, notamment lors des déterminations des différentes élasticités ou de la nature des rendements d'échelles.
Cette leçon est un pré-requis nécessaire à la leçon fondamentale 3 (Optimisation).
Elle reprend rapidement beaucoup de notions introduites en L1. Il est bon de ce reporter à la leçon 8 du cours de Mathématiques1 en cas de difficulté.

1. RAPPELS

1.1. Les dérivées partielles premières

Soit $f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ une fonction numérique à plusieurs variables définie sur un domaine D de **$\mathbb{R}^n$.**

La **dérivée partielle** de f par rapport à x_i au point $X_0 = (x_{01}, x_{02}, x_{03}, \ldots, x_{0n})$, notée $\frac{\partial f}{\partial x_i}(X_0)$ ou $f'_{xi}(X_0)$ est la dérivée en x_{0i} de la fonction de la seule variable x_i définie par $x_i \to f(x_{01}, .,x_i ,.,x_{0n})$ les n-1 autres variables étant fixées.

Elle a toutes les propriétés des dérivées.

1.2 Différentielle

Nous admettrons que si une fonction est continue et possède des dérivées partielles continues, alors elle est **différentiable**.

Nous ne fournirons pas de plus amples explications théoriques, c'est la généralisation de la notion de différentielle à une variable. Et nous écrirons :

$$\mathbf{df} = \frac{\partial f}{\partial x} . dx + \frac{\partial f}{\partial y} . dy = f'_x.dx + f'_y.dy$$

Cette formulation est assez simple à retenir lorsqu'on se souvient que $\frac{\partial f}{\partial x}$ représente la façon dont f est modifiée à la suite d'une "légère" variation de x
(x donne x + dx), y restant inchangé et que $\frac{\partial f}{\partial y}$ représente la façon dont f est modifiée à la suite d'une légère variation de y (y donne y + dy), x restant inchangé.
df est donc la somme de deux composantes, l'une qui concerne x ($\frac{\partial f}{\partial x}$ .dx) et l'autre qui concerne y ($\frac{\partial f}{\partial y}$ .dy).

On s'attachera, comme pour les fonctions à une variable, à ne pas confondre $df(x_0,y_0)$ et $\Delta f = f(x_0 +dx,y_0+dy) - f(x_0,y_0)$. Plus dx et dy sont petits, plus ces deux quantités sont voisines. Mais elles sont en général distinctes et approximer l'une par l'autre demande quelques précautions.

Etant donné la forme de df, les règles de différentiation que nous avons rencontrées pour une variable restent vraies pour plusieurs variables:

d(f+g) = df + dg , d(kf) = kdf (k constante réelle) d(fg) = gdf + fdg … etc

On peut généraliser ce résultat à n variables ($n \geq 2$)
Si $f : (x_1,x_2,\ldots,x_n) \to f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ est continue et si ses dérivées partielles sont toutes continues, f est différentiable et :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}.dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}.dx_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}.dx_n$$

1.3. Les dérivées partielles secondes

Soit f une fonction numérique à n variables $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ définie sur un domaine D de $\mathbf{IR^n}$ **a**dmettant n dérivées partielles premières continues sur D

On appelle **dérivée partielle seconde** de f par rapport à $x_i\, x_k$ au point $X_0 = (x_{01}, x_{02}, x_{03}, \ldots, x_{0n})$, notée $\frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x_i} \partial \mathbf{x_k}}(X_0)$ ou $f''_{x_ix_k}(X_0)$ est la dérivée en x_{0k} de la fonction $x_k \to \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_{01},..,x_k,..,x_{0n})$ de la seule variable x_k, les n-1 autres étant fixées.

Elle a toutes les propriétés des dérivées.

2. Formules d'approximation locale par un polynôme

Développements limités

Pour établir des développements limités, on peut utiliser une **formule de Taylor**.

A l'ordre 1, on a :

Si une fonction f de deux variables x et y a des dérivées partielles continues au **voisinage** V de $A = (x_0,y_0)$: si on pose $B = (x_0 + h, y_0 + k)$

$$\forall B \in V : \ f(B) = f(A) + h\frac{\partial f}{\partial x}(A) + k\frac{\partial f}{\partial y}(A) + o(h,k)$$

$o(h,k)$ est le reste, il est de la forme : $\sqrt{h^2 + k^2}\,\varepsilon(h,k)$ avec $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon(h,k) = 0$,

et **est négligeable devant les termes qui le précèdent** (sauf si $\frac{\partial f}{\partial x}(A)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(A)$ sont nuls).

Remarques :
1) Cette formule n'a d'intérêt que pour (h, k) voisin de (0,0) puisque la seule information sur le reste concerne son comportement au voisinage de (0,0).

2) La formule précédente s'écrit aussi :

$$\forall (x,y) \in V : f(x,y) = f(x_0,y_0) + (x-x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + (y-y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) + o((x-x_0),(y-y_0))$$

$$o((x-x_0),(y-y_0)) = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}\ \varepsilon(h,k) \quad \text{avec} \quad \lim_{(hx,y)\to(x_0,y_0)} \varepsilon(x-x_0,y-y_0) = 0$$

A l'ordre 2, on a :

Si f a des dérivées partielles du second ordre continues sur un voisinage V de $A = (x_0, y_0)$: si on pose $B = (x_0+h, y_0+k)$, $\forall B \in V$,

$$f(B) = f(A) + h\frac{\partial f}{\partial x}(A) + k\frac{\partial f}{\partial y}(A) + \frac{1}{2}\left[h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) + 2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A) + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A)\right] + o(h^2,k^2)$$

$o(h^2,k^2)$ est le **reste**, il est de la forme :

$$(h^2 + k^2)\varepsilon(h,k) \quad \text{avec} \quad \lim_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon(h,k) = 0$$

et est **négligeable devant les termes qui le précèdent** (sauf s'ils sont nuls).

Remarques :
Ici encore cette formule n'a d'intérêt que pour (h,k) voisin de (0,0) puisque la seule information sur le reste concerne son comportement au voisinage de (0,0).
Ce qu'il faut retenir sur le reste est qu'il est négligeable devant les termes qui le précèdent.
La formule précédente s'écrit aussi :

$$\forall (x,y) \in V : f(x,y) = f(x_0,y_0) + (x-x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + (y-y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) +$$
$$\frac{1}{2}\left[(x-x_0)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) + 2(x-x_0)(y-y_0)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) + (yy_0)^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)\right]$$
$$+ o((x-x_0)^2,(y-y_0)^2)$$

$$o((x-x_0)^2,(y-y_0)^2) = ((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2)\,\varepsilon(x-x_0,y-y_0) \quad \text{avec} \quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \varepsilon(x-x_0,y-y_0) = 0$$

On peut aussi, si c'est possible, utiliser les techniques mises en place pour les fonctions à une variable.

Rappel : Voici les différents développements limités vus en L1. Il est bon de les savoir par cœur, ces formules sont très utiles dans les exercices. Néanmoins si nécessaire elles seront données à l'examen.

Dans toutes ces formules ε désigne une fonction qui tend vers zéro en zéro (ε est différente à chaque ligne bien sûr). Etant donnée la seule information que l'on a sur ε, ces développements limités n'ont un intérêt que pour **x voisin de zéro.**

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + x^n\,\varepsilon(x)$$

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n + x^n\,\varepsilon(x) \quad (m \in \mathbf{IR})$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + x^n\,\varepsilon(x)$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + x^n\,\varepsilon(x)$$

On a aussi :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + x^{2n}\,\varepsilon(x)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^{n}\frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+1}\,\varepsilon(x)$$

Remarque : Ces six formules s'appliquent pour toute quantité u qui est voisine de 0, pour cela il suffit de remplacer x par u dans la formule.

3. Fonctions implicites

3.1. Fonctions implicites dans le cas de deux variables

Tout d'abord expliquons ce qu'est une **fonction implicite**. Lorsqu'on étudie une fonction $x \to y = f(x)$, y est explicitement fonction de x, c'est à dire que, connaissant les différentes valeurs de x, on peut calculer directement y.
Il arrive que y ne puisse pas être calculé explicitement et que y soit tout de même une fonction de x.

Exemple : $\cos y + x - \frac{1}{2} = 0$ et $y \in [0,\pi]$.

Cela définit bien une fonction $f : x \to y$ puisque si $x \in [\frac{-1}{2}, \frac{3}{2}]$, $(\frac{1}{2} - x) \in [-1,1]$ et l'équation $\cos y = \frac{1}{2} - x$ a une solution et une seule dans $[0,\pi]$. y apparaît comme l'image de x par f, mais on ne sait pas écrire f(x). f est une fonction implicite.

On est donc amené à se poser la question suivante :
Existe-t-il toujours une fonction $x \to y$ définie implicitement par une équation de la forme $F(x, y)=0$?
La réponse est non, bien sûr, car il peut y avoir, par exemple, plusieurs valeurs de y correspondant à une même valeur de x. Mais nous allons admettre un théorème (la démonstration est difficile et dépasse le cadre du programme de Licence) qui nous permettra de répondre positivement à cette question sous certaines conditions :

Théorème d'existence et d'unicité d'une fonction implicite : Etant donné une fonction $F : (x,y) \to F(x,y)$ continue, telle que $F(x_0,y_0) = 0$ et qui possède en (x_0,y_0) des dérivées partielles $\frac{\partial F}{\partial x}$ et $\frac{\partial F}{\partial y}$ continues (avec $\frac{\partial F}{\partial y}$ non nulle en (x_0,y_0)), sur un voisinage de (x_0,y_0), il existe une fonction $f : x \to y = f(x)$ unique définie et continue dans un voisinage de x_0, telle que $F(x,f(x)) = 0$.

On peut alors se demander si f est dérivable au voisinage de x_0.
$\frac{\partial F}{\partial x}$ et $\frac{\partial F}{\partial y}$ sont continues donc F est différentiable et :

$dF = \frac{\partial F}{\partial x}.dx + \frac{\partial F}{\partial y}.dy$ et puisque $F(x,y) = 0$, $dF = 0$ et $\frac{\partial F}{\partial x}.dx + \frac{\partial F}{\partial y}.dy = 0$.

$$\text{D'où : } \frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y}$$

La fonction $f : x \to y = f(x)$ définie implicitement par $F(x,y) = 0$, est alors dérivable en x_0 et $f'(x_0) = -\frac{F'_x}{F'_y}(x_0,y_0)$.

Exemple :
Reprenons le cas de la droite de budget d'un consommateur, sa formulation générale est :
$R = p_x.x + p_y.y$ (c.f chapitre continuité – dérivée - différentielle Licence 1ère année).

Ici $F(x,y) = p_x.x + p_y.y - R$ (p_x et p_y sont des constantes) et $\frac{\partial F}{\partial x} = p_x$, $\frac{\partial F}{\partial y} = p_y$

et on retrouve que $f'(x) = \frac{dy}{dx} = -\frac{p_x}{p_y}$.

3.2. Dérivées des fonctions implicites dans le cas de trois variables

On peut généraliser le théorème énoncé pour deux variables. On obtient que si
$F : (x,y,z) \to F(x,y,z)$ est continue et telle que $F(x_0,y_0,z_0) = 0$ et si F admet des dérivées partielles continues au voisinage de (x_0,y_0,z_0) (avec $F'_z(x_0,y_0,z_0) \neq 0$) alors il existe une unique fonction $f : (x,y) \to z = f(x,y)$ définie et continue au voisinage de (x_0,y_0) et telle que $F(x,y,f(x,y)) = 0$.

De plus f a des dérivée partielles qui vérifient :
$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial z}{\partial x}(x_0,y_0) = -\frac{F'_x}{F'_z}(x_0,y_0,z_0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = \frac{\partial z}{\partial y}(x_0,y_0) = -\frac{F'_y}{F'_z}(x_0,y_0,z_0)$

Ceci se généralise de façon analogue à 4, 5 … n variables.

4. Fonctions homogènes

Définition : Une fonction $f : (x,y) \to f(x,y)$ est dite **homogène** de **degré k** ssi : pour tout $a \in \mathbf{R}$ tel que f soit définie en (ax,ay) et (x,y), $f(ax,ay) = a^k f(x,y)$.

Cette définition se généralise naturellement à 3, 4 , 5 … n variables .

Exemple :

Donnons une application économique qui permettra d'illustrer la notion de fonction homogène : **Fonctions homogènes et rendements d'échelle.**

Considérons une fonction de production $Q = f(K,L)$. Si nous décidons de doubler les facteurs K et L, qu'en résulte-t-il pour la production Q ?

Tout dépend de la façon dont les nouveaux inputs peuvent participer au processus de production. La production peut doubler comme elle peut augmenter de 30% ou au contraire tripler. La notion qui traduit l'ampleur de la variation de la production s'appelle "rendements d'échelle".

*Lorsque la fonction de production est à **rendements constants**, cela signifie qu'en multipliant les inputs K et L par a, l'output Q est multiplié aussi par a :
$f(aK,aL) = af(K,L)$.
f apparaît ainsi comme une fonction homogène de degré 1.
*On définit de même les **rendements croissants** par le fait qu'une augmentation des inputs K et L entraîne une augmentation plus forte de la production Q telle que : $\forall a > 1$
$f(aK, aL) = a^k f(K,L)$ avec $k > 1$.

*Enfin les **rendements décroissants** correspondent à une baisse de l'efficacité. On augmente les inputs et l'output augmente de façon moindre :

$$\forall a > 1 \quad f(aK,aL) = a^k f(K,L) \text{ avec } k < 1.$$

Propriété 1: Si une fonction homogène est de degré k, ses dérivées partielles, si elles existent, sont homogènes de degré k-1.

Démonstration: soit $f : (x,y) \to f(x,y)$ homogène de degré k et f'_x et f'_y ses dérivées partielles.
$\forall a \in \mathbf{R}$: $f(ax,ay) = a^k f(x,y)$. Dérivons partiellement les deux membres de cette équation :

$$a.f'_x(ax,ay) = a^k f'x(x,y) \quad \text{d'où} \quad f'_x(ax,ay) = a^{k-1} f'_x(x,y).$$

De même : $a.f'_y(ax,ay) = a^k f'_y(x,y)$ d'où $f'_y(ax,ay) = a^{k-1} f'y(x,y)$.

Et la propriété est démontrée.

•Attention : $f'_x(ax,ay)$ désigne la valeur de f'_x en (ax,ay), ce n'est pas la dérivée partielle par rapport à x de $(x,y)\to f(ax,ay)$ qui elle est $f'_x(ax,ay).a$ (dérivée d'une fonction composée).

Propriété 2 : Si f est une fonction homogène de degré k, les fonctions moyennes $g : (x,y)\to \dfrac{f(x,y)}{x}$ et $h : (x,y)\to \dfrac{f(x,y)}{y}$ sont homogènes de degré k-1.

Démonstration : en effet $g(ax,ay) = \dfrac{f(ax,ay)}{ax} = \dfrac{a^k f(x,y)}{ax} = a^{k-1}\dfrac{f(x,y)}{x} = a^{k-1}g(x,y)$.
On ferait un raisonnement analogue pour h.

Relation d'Euler : Soit $f : (x,y) \to f(x,y)$, homogène de degré k et admettant des dérivées partielles. Alors : $x.f'_x(x,y) + y.f'_y(x,y) = k f(x,y)$.

Démonstration : Dérivons par rapport à a la relation $f(ax,ay) = a^k f(x,y)$. On obtient

$$f'x(ax,ay).x + f'y(ax,ay).y = ka^{k-1}f(x,y).$$

0r, d'après la propriété 1, f 'x et f 'y sont homogènes de degré k-1, la relation précédente devient,

$$a^{k-1}f'x(x,y).x + a^{k-1}f'y(x,y).y = ka^{k-1}f(x,y).$$

Et en simplifiant par a^{k-1}, on obtient bien $x.f'x(x,y) + y.f'y(x,y) = kf(x,y)$.

5. Applications économiques

Ce paragraphe est intéressant et s'adresse plus spécifiquement aux économistes mais il ne fait pas partie du programme de l'examen.

5.1. Élasticités croisées de la demande

Lorsque la fonction de demande fait intervenir plusieurs variables comme le prix de plusieurs biens, on introduit la notion d'élasticité croisée.

L'idée est simple. Par exemple, soient deux biens, pneumatiques et voiture. Si le prix des voitures augmente, la demande diminuera entraînant la baisse de la demande de pneumatiques. On voit alors, que la demande d'un bien peut dépendre du prix d'un autre bien.

Si q_1 est la fonction de demande d'un premier bien (ici les pneumatiques) et p_2 le prix d'un deuxième bien (ici les voitures), la formule de **l'élasticité croisée** est la suivante :

$$\varepsilon_{q_1,p_2} = \frac{\partial q_1}{\partial p_2} \times \frac{p_2}{q_1}.$$

Si $z = f(x,y)$, $\varepsilon_{zx} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{x}{z} = \frac{\partial f}{\partial x} \times \frac{x}{f(x,y)}$, de même $\varepsilon_{zy} = \frac{\partial z}{\partial y}\frac{y}{z} = \frac{\partial f}{\partial y} \times \frac{y}{f(x,y)}$.

5.2. Élasticité de substitution

Nous étudierons cette notion d'élasticité dans le cas d'une fonction de production $Q : (K,L) \to f(K,L)$.

On se place à production constante Q_0 et on suppose que $f(K,L) - Q_0 = 0$ permet de définir implicitement K comme fonction de L et que le théorème des fonctions implicites s'applique.

Le taux marginal de substitution (TMS) capital-travail est le rapport de la quantité de capital dK cédée et de la quantité supplémentaire de travail dL obtenue, sachant qu'on reste au même niveau de production Q_0. D'après la formule de dérivation des fonctions implicites :

$$\text{TMS} = T = \left|\frac{dK}{dL}\right| = \left|\frac{f'_L}{f'_K}\right|.$$

Le taux T varie au fur et à mesure que se poursuit la substitution capital-travail et on souhaiterait connaître les modifications du rapport capital/travail en fonction des variations de T.

On suppose ici encore qu'implicitement le rapport $k = K/L$ est une fonction de T et on s'intéresse à l'élasticité σ de cette fonction :

$T \to k(T) = \frac{K}{L}$ σ s'appelle **l'élasticité de substitution**.

Appliquons la formule qui donne l'élasticité de la fonction k :

$$\sigma = \frac{dk}{dT} \cdot \frac{T}{k} = \frac{dk/k}{dT/T} \quad \text{avec } k = K/L \quad \text{et } T = \left|\frac{dK}{dL}\right|.$$

Exemples :

1) Si $Q = K^{\alpha}L^{1-\alpha}$ $(0 < \alpha < 1)$ (fonction de Cobb-Douglas) , nous montrerons en exercice le résultat suivant :

L'élasticité de substitution d'une fonction de Cobb-Douglas :
$(K,L) \to Q = K^{\alpha}L^{1-\alpha}$ est égale à 1 . $\sigma = \dfrac{dk/k}{dT/T} = 1$ (avec $k = \dfrac{K}{L}$ et $T = \left|\dfrac{dK}{dL}\right|$)

2) On s'intéresse depuis quelques années à des fonctions de production dont l'élasticité de substitution est constante (mais pas forcément égale à 1) , de telles fonctions sont appelées C.E.S (constant elasticity of substitution) et leur expression est :

$Q = f(K,L) = A[\alpha K^{-\gamma} + (1-\alpha)L^{-\gamma}]^{-1/\gamma}$ $(A > 0,\ \gamma > -1$ et $0 < \alpha < 1)$

Le paramètre γ est appelé paramètre de substitution et il intervient dans l'expression l'élasticité de substitution σ de la fonction de production C.E.S.

Nous montrerons en exercice que $\sigma = \dfrac{1}{1+\gamma}$.

Exercices

Exercice 1

Calculer les dérivées partielles premières des fonctions suivantes après avoir précisé l'ensemble sur lequel le calcul est possible :

1) $f(x,y) = \dfrac{x^2 - xy}{xy^2}$ 2) $f(x,y) = \sqrt{x^2y - 2xy + 3}$ 3) $f(x,y) = \ln(x + \sqrt{x + y^2})$

4) $f(x,y) = x^2\exp(\dfrac{xy}{y + 1})$.

Exercice 2

Ecrire les différentielles df des fonctions f définies par les expressions suivantes, après avoir précisé l'ensemble des couples (x,y) pour lesquels le calcul est possible :

1) $f(x,y) = x^2 + xy^2$ 2) $f(x,y) = \dfrac{x^3y}{x - y + 1}$ 3) $f(x,y) = x\exp(1 + \dfrac{x}{y})$

4) $f(x,y) = \dfrac{\ln(x^2 + y^2)}{x+1}$

Exercice 3

Déterminer le développement limité de f à l'ordre 2 et au voisinage de (x_0,y_0) dans les cas suivants :

1) $f(x,y) = \sqrt{xy + 2x - y - 1}$ et $(x_0,y_0) = (1,-1)$,

2) $f(x,y) = \dfrac{\ln(2 + x^2 - 2x + y)}{x^2y - 2xy + y + x - 2}$ et $(x_0,y_0) = (1,0)$.

Rappel : pour x voisin de zéro.

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + x^n\,\varepsilon(x)$$

$$(1 + x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}x^n + x^n\,\varepsilon(x) \quad (m\in R)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + x^n\,\varepsilon(x)$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + x^n\,\varepsilon(x)$$

Exercice 4

Calculer les dérivées partielles secondes des fonctions suivantes :

1) $(x,y,z) \to 3xy^2 - x^3z^2 + xyz - 1$

2) $(x,y,z) \to (x + y)\exp(\dfrac{y}{x + z})$

3) $(x,y,z) \to \dfrac{x}{z}\ln y^2$.

Exercice 5

Soit $F(x,y) = e^{xy} - x^3 + y$. Montrer qu'au voisinage de (1,0), F(x,y) = 0 définit y comme fonction implicite de x. Calculer $\dfrac{dy}{dx}(1)$.

Exercice 6

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = \dfrac{\ln(x^2 + y^2)}{xy + 1}$

1) Préciser ensemble sur lequel f est différentiable (faire un dessin rapide).
2) La relation $f(x,y) - 2 = 0$ définit-elle, au voisinage de $(0,e)$, une fonction ϕ telle que $y = \phi(x)$? (Citer le théorème utilisé)
3) Calculer $\phi'(0)$.

Exercice 7

1) Soit f, une fonction homogène de degré 1 et deux fois continûment différentiable.
Ecrire la formule d'Euler. En déduire que :

(1) $\quad x\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + y\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0.$

(on pourra dériver partiellement par rapport à x la formule d'Euler)

Trouver une formule analogue liant $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$. Montrer alors que

(2) $\quad x^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = y^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

2) Soit $f(x,y) = \dfrac{xy\ln(\frac{x}{y}+1)}{x+y}$.

Déterminer l'ensemble des (x,y) pour lesquels f est deux fois continûment différentiable (faire un dessin). Montrer que f est homogène et déterminer son degré d'homogénéité. Vérifier (1) et (2).

Exercice 8

Soit f une fonction de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x,y,z) = x^3 \ln\dfrac{x^2 + y^2}{z^2}$.

1) Donner l'ensemble de définition de f et l'ensemble sur lequel f admet des dérivées partielles d'ordre 1.
2) Montrer que f est homogène et préciser son degré d'homogénéité.
3) Calculer les dérivées partielles de f d'ordre 1 et vérifier la relation d'Euler.

Exercice 9

La fonction de Coog-Douglas :
Soit $f : (L,K) \to Q = K^{\alpha}L^{1-\alpha}$ $(0 < \alpha < 1)$
1) Calculer le taux marginal de substitution T de f .
2) En déduire l'élasticité de substitution σ de f .

Exercice 10

La fonction de production C.E.S
Soit $f : (L,K) \to Q = A[\alpha K^{-\gamma} + (1-\alpha)L^{-\gamma}]^{-1/\gamma}$ $\quad (A > 0 , \gamma > -1$ et $0 < \alpha < 1)$
1) Calculer le taux marginal de substitution T de f .
2) En déduire l'élasticité de substitution σ de f .