Leçon 01 – Exercices d'entraînement

Exercice 1
Etudier la convergence des suites ci-dessous définies par leur terme général:

1) $u_n = \dfrac{2n^3 - 5n + 1}{n^2 + 3}$ 2) $u_n = \dfrac{2n^2 - 7n - 5}{-n^5 - 1}$ 3) $u_n = \sqrt{4n^2 + n} - 2n$

4) $u_n = \dfrac{\ln n^2}{\sqrt{n+1}}$ 5) $u_n = \dfrac{n^4}{e^n}$ 5) $u_n = (1 + \dfrac{1}{n})^n$.

Exercice 2

Montrer que la suite de terme général $u_n = (-1)^n \dfrac{2n - 1}{n + 1}$ est bornée. Est-elle convergente? Est-elle monotone?(représenter u graphiquement).

Exercice 3
Soit u la suite définie par $u_n = \dfrac{2^n}{n!}$.
1) Montrer qu'à partir d'un certain rang u est décroissante.
2) Etudier la convergence de u.

Exercice 4

Soit u la suite définie pour tout n par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n \exp(-u_n) \end{cases}$.
1) Montrer que pour tout n, u_n est positif.
2) Etudier la monotonie de u_n.
3) Etudier la convergence de u.

Exercice 5
1) Soit $f(x) = \sqrt{3x + 4}$ pour $x \geq 0$.
a) Montrer que pour tout x et y positifs :

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{3}{4} |x - y|$$

b) Montrer que pour tout $x > 0$,

$$|f(x) - 4| \leq \frac{3}{4} |x - 4|.$$

2) Soit u la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$. Montrer, en utiliser le résultat de la première question que : $|u_n - 4| \leq 4(\frac{3}{4})^n$. En déduire la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 6

Soit u la suite définie pour tout entier n par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \ln(1 + u_n) \end{cases}$

1) Après avoir étudié le sens de variation de $g : x \to \ln(1 + x) - x$ sur $]0 ; +\infty[$, montrer que pour tout $x > 0$: $0 < \ln(1 + x) < x$.

2) Montrer que pour tout entier n, u_n est strictement positif.

3) Déduire de ce qui précède que u converge.

Exercice 7

Soit u la suite définie pour tout entier n par $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = \dfrac{9}{6 - u_n} \end{cases}$.

1) Montrer que pour tout réel x de $]-\infty ; 3[$, on a $\dfrac{9}{6 - x} < 3$. Et en déduire que pour tout entier n, u_n est définie.

2) Soit v la suite définie par $v_n = \dfrac{1}{u_n - 3}$. Montrer que v est arithmétique.

3) En déduire u_n en fonction de n et sa limite quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 8

Montrer par récurrence que :

1) $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

2) $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$.

(somme des n premiers nombres impairs)

3) $n! > 2^{n-1}$ à partir du rang 3.

Exercice 9

On considère la suite u définie pour tout entier n par $\begin{cases} u_0 = e^3 \\ u_{n+1} = e\sqrt{u_n} \end{cases}$.

1) Calculer u_1, u_2, u_3 en fonction de e.

2) On pose $v_n = \ln u_n - 2$. Montrer que v est une suite géométrique dont on précisera son premier terme et sa raison.

3) En déduire u_n en fonction de n ainsi que sa limite quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 10

Soit u_n la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n - 2 \end{cases}$.

1) On pose $v_n = u_n + 3$. Montrer que v est une suite géométrique dont on donnera son premier terme et sa raison

2) En déduire u_n en fonction de n puis calculer $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

3) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

Exercice 11

Soit f et g les fonctions qui à tout réel x associe $f(x) = e^x - 1$ et $g(x)=f(x) - x$.

1) En étudiant les variations de g, montrer que 0 est l'unique solution de l'équation $f(\alpha) = \alpha$.

2) Représenter rapidement la suite u définie par $\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) \\ u_0 = -1 \end{cases}$

3) A l'aide du tableau de variation de g, montrer que u est croissante.

4) Montrer que u est convergente et calculer sa limite.

5) Sans démonstration, en justifiant avec un dessin, préciser le comportement de u si $u_0 = 1$.

Exercice 12

Un capital de 10 000 € est placé à intérêts simples pendant 6 mois au taux annuel i, puis pendant 6 mois au même taux plus 2% (+ 2 points). On désire obtenir 1 130 € d'intérêts en fin de placement. Quel doit être le taux i ? (on suppose que les intérêts des 6 premiers mois sont replacés avec le capital pour les 6 derniers mois).

Exercice 13

Un investisseur a placé une certaine somme à intérêts composés pour une longue période. On dispose des renseignements suivant sur ce placement :

* le montant de la valeur acquise au bout de la $7^{ème}$ année s'élève à 177 014.22 €,
* le montant de la valeur acquise au bout de la $10^{ème}$ année s'élève à 226 098.34 €,
* le montant des intérêts capitalisés à l'expiration de la durée du placement se monte à 239 974.29 €.

1) Retrouver le taux d'intérêt.
2) Retrouver le capital investi.
3) Déterminer la durée totale du placement.

Exercice 14

Un organisme bancaire propose les contrats suivants :
C_3 : contrat à 3 ans et 4 mois. On investit un capital pendant cette période. A la fin de la période, si l'indice du CAC 40 a augmenté, on récupère son capital, plus une prime de 20% du capital, sinon on ne récupère que son capital.
C_5 : contrat à 5 ans. La prime en cas d'augmentation du CAC 40 est de 40%.
C_8 : contrat à 8 ans et 4 mois. La prime en cas d'augmentation du CAC 40 est de 70%.
1) Dans l'hypothèse où le CAC40 augmente effectivement au cours de ces différentes périodes, calculer le taux annuel, donnant le même rendement, pour un calcul avec intérêts composés, pour chacun des contrats.
2) De plus, on a un droit d'entrée, pris sur le capital versé en début de période, ne fournissant donc pas d'intérêt, de 2% pour les contrats C_5 et C_8. Evaluer, en fonction de la valeur actuelle V_0, la valeur acquise en fin de chacun de ces contrats, puis évaluer comme en 1) le taux annuel donnant le même rendement, toujours sur la base d'intérêts composés.

Exercice 15

Un industriel se propose d'acquérir une machine. Il consulte trois fournisseurs qui lui font chacun une offre.
* Le fournisseur A propose une machine pour 50 000 € comptant.
* Le fournisseur B propose une machine payable en quatre fois :
    10 000 € comptant
    20 000 € après un an
    20 000 € après 2 ans
    10 000 € après trois ans
* Le fournisseur C propose une machine payable en six fois :
    rien au comptant
    10 000 € après un an
    10 000 € après 2 ans
    10 000 € après 3 ans
    15 000 € après 4 ans
    15 000 € après 5 ans
    10 000 € après 6 ans

Sachant que les trois machines sont équivalentes pour l'industriel, et que le taux d'actualisation sur le marché financier est 10.75% l'an, déterminer quelle est l'offre la plus intéressante (pour cela calculer les valeurs actualisées des offres de B et C).

Exercice 16

Un appartement est évalué à 160 000 €. Le propriétaire en propose l'achat aux conditions suivantes :
50 000 € comptant plus 18 mensualités de 6 500 €. La première ayant lieu le 15/04/2002 soit 3 mois plus tard, et la dernière le 15/01/2006.
Sachant que le taux d'actualisation est de 9% l'an, est-ce une opération intéressante?

Exercice 17

1) Quel est le montant de l'annuité constante à s'acquitter si au taux de 10% par an, on a obtenu pour l'achat d'un bien de 100 000 €, le règlement par 10 annuités constantes, la première payable immédiatement.

2) Si l’annuité est égale à 19 564. 08 € et si le taux est égal à 12%, combien d’annuités faut-il régler ?

Exercice 18
Etablir l’échéancier d’un emprunt de 45 000 € au taux de 8% pendant 8 ans sachant que le remboursement est effectué à annuités constantes.

Exercice 19
Une société emprunte 1 000 000 € qu’elle amortit par annuités constantes sur 10 ans au taux annuel de 10%. Après le paiement de la 5$^{\text{ème}}$ annuité, elle rembourse le capital restant dû pour un nouvel emprunt à annuités constantes sur 5 ans, au taux annuel de 6.5%.
1) Construite le tableau d’amortissement relatif aux 5 premières années.
2) Sachant qu’on lui a appliqué une pénalité de 3% sur le capital restant dû du premier emprunt, quelle est l’économie réalisée ?

Indications

Exercice **3** : 1) Calculer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.
2) Montrer que u est minorée.

Exercice **5** : Utiliser le théorème des gendarmes à $|u_n - 4|$ après avoir remarqué que
$0 \leq |u_n - 4| \leq 4(\frac{3}{4})^n$.