Leçon 01 - Cours : Suites

- -

Objectif : Maîtriser la notion de suite, les définitions s'y rattachant ainsi que les méthodes permettant de prouver la convergence. Savoir les définitions et les résultats se rapportant aux suites arithmétiques et géométriques. Etre capable de faire un raisonnement par récurrence si la situation s'y prête. Enfin connaître les notions de calcul financier abordées.

Cette leçon s'intéresse aux techniques particulières à mettre en œuvre pour les fonctions ayant un ensemble de départ discret puisque c'est **N**. La notion de suite intervient par exemple dès que l'on considère des fonctions séquentielles du temps. C'est à dire, où le temps n'est pas considéré comme continue, mais comme prenant les valeurs 0, 1, 2 ,3 …. . On débouche alors sur des problèmes posés sur un mode récurrent, où une situation à l'instant n est définie à partir du passé immédiat, n-1. Quant aux calculs financiers, il est très utile dans la pratique d'en avoir un minimum de notions. Ces notions sont bien sûr indispensables aux futurs gestionnaires.

1. Généralités

Définition : Une suite réelle est une fonction de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{R}$.

Notation : $u : n \rightarrow u_n$, u est aussi notée (u_n).

1.1. Différentes façon de définir une suite

1) $u_n = f(n)$. u est la restriction à $\mathbf{N}$ d'une fonction numérique connue. C'est le cas le plus simple.

2) u_n est défini à partir des termes précédents, on dit alors que la suite u est définie par récurrence. $u_{n+1} = f(u_n)$ ou $f(u_n, u_{n-1})$ …etc.

On constate que pour les suites définies par récurrence un terme ne peut être obtenu que si on connaît tous ses précédents. L'analyse de telles suites est beaucoup plus compliquée que celle des suites de la forme $u_n = f(n)$.

Remarques :
1) Avec du temps, on peut toujours étudier une suite en calculant les termes les uns après les autres, ce que l'on ne peut pas faire lorsque la variable est réelle (entre 2 réels distincts il y a toujours une infinité de réels). En général chaque terme a un précédent et un successeur. Pour faire ce genre d'étude la machine est un bon outil.

2) On s'intéresse surtout au comportement de la suite pour les grandes valeurs de n. Il faut donc faire attention aux irrégularités trompeuses que peuvent présenter les premiers termes, irrégularités qui n'ont pas d'intérêt.

3) Il faut prendre garde à la numérotation des suites , si u_0 est le premier terme, u_n est le $(n+1)^{\text{ième}}$ terme, si u_1 est le premier terme, u_n est le $n^{\text{ième}}$ terme. Parfois, pour des problèmes d'ensemble de définition, ou autres, la suite commence au rang k, u_k est le premier terme, u_n est alors le terme de rang $(n+1-k)$.

1.2. Définitions nécessaires à l'étude des suites.

Suite majorée : u est majorée si et seulement si il existe un réel M tel que :
$$\forall n \in \mathbf{N} \quad u_n \leq M.$$

Suite minorée : u est minorée si et seulement si il existe un réel m tel que :
$$\forall n \in \mathbf{N} \quad u_n \geq m.$$

Suite bornée : u est bornée si et seulement si u est à la fois majorée et minorée.

Remarque utile : u est bornée si et seulement si u est majorée.

Suite croissante : u est croissante à partir du rang n_0 si et seulement si :
$$\forall n \geq n_0 \qquad u_{n+1} \geq u_n.$$

Suite décroissante : u est décroissante à partir du rang n_0 si :
$$\forall n \geq n_0 \qquad u_{n+1} \leq u_n.$$

N.B. : Si f est croissante (respectivement décroissante) sur $[n_0, +\infty[$ et si $u_n = f(n)$, u est croissante (respectivement décroissante) à partir du rang n_0 (attention la réciproque est fausse, dans ce cadre, par exemple u peut être croissante sans que f le soit).

Remarques :
1) Pour étudier la monotonie d'une suite définie par récurrence, le plus simple est d'étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$. Si $u_{n+1} - u_n \geq 0$ u est croissante et si $u_{n+1} - u_n \leq 0$ u est décroissante.
2) Toute suite croissante est minorée par son premier terme.
3) Toute suite décroissante est majorée par son premier terme.

2. Limites

Quand on étudie une suite, on s'intéresse essentiellement à son comportement pour les grandes valeurs de n. En effet les premiers termes sont calculables facilement et nous donne l'allure de la suite pour n petit. Aussi, on s'attache le plus souvent à savoir si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ existe et à calculer cette limite si elle existe.

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ existe et est finie, on dit que u converge, ou est convergente, dans les autres cas (limite infinie ou pas de limite) on dit que u est divergente ou diverge.

2.1. Cas des suites définies par $u_n = f(n)$

Si $u_n = f(n)$ et si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ existe alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Si u_n est équivalent à a_n quand $n \to +\infty$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ existe alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.

2.2. Théorèmes liés à la convergence

Théorème d'unicité : Si (u_n) a une limite, elle est **unique**.

Théorème des « gendarmes » :
Si, à partir d'un certain rang $v_n \leq u_n \leq w_n$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \ell$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

* Toute suite **croissante majorée** converge.
* Toute suite **décroissante minorée** converge.

2.3. Cas des suites définies par $u_{n+1} = f(u_n)$

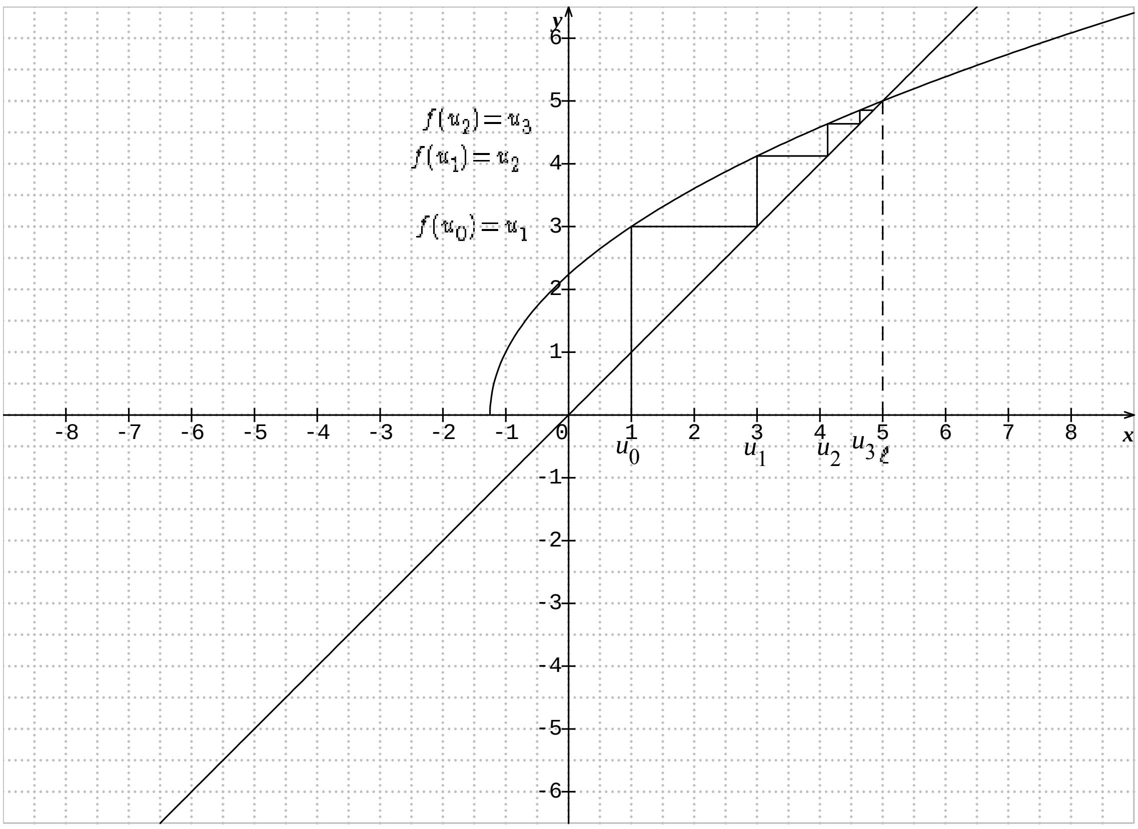
Dans ce cas on se gardera bien de penser que u et f ont même limite à l'infini mais on utilisera les théorèmes précédents.

Remarque : Il faut faire attention aux rôles différents que joue f dans les 2 cas suivants: $u_n = f(n)$ et $u_n = f(u_n)$.

2.3.1. Représentation graphique de u_n dans le cas où $u_{n+1} = f(u_n)$

Dans ce cas la représentation de u est particulière et utilise la représentation graphique de f et la droite d'équation y = x.

Exemple **:**



On utilise la courbe représentative de f pour obtenir $u_1 = f(u_0)$ sur l'axe des ordonnées. Puis à l'aide de la droite d'équation y = x on rabat u_1 sur l'axe des abscisses. On obtient u_2 sur l'axe des ordonnées à l'aide de la courbe représentative de f …etc

C'est l'escalier qui est intéressant. Ici on prévoit que u est croissante et converge vers l'abscisse ℓ du point d'intersection de la courbe et de la droite.

Par contre si $u_0 = 6$ par exemple on prévoit ici que u est toujours croissante mais diverge.

2.3.2 Théorème

Voici un théorème très utile pour déterminer la limite d'une suite définie par récurrence à l'aide d'une fonction **continue** et quand **on sait que cette suite converge**.

Si u est définie par récurrence par u_0 et $\mathbf{u_{n+1} = f(u_n)}$ **et converge** et si f est **continue** sur un intervalle contenant les valeurs de u alors la limite ℓ de u vérifie $\mathbf{f(\ell) = \ell}$.

Attention: Ce théorème ne prouve pas que u converge. Pour appliquer ce théorème il faut d'abord montrer que u converge et bien sûr que f est continue.

3. Suites arithmétiques et raisonnement par récurrence

3.1. Suites arithmétiques

Définition : (u_n) est une suite arithmétique, s'il existe un réel r tel que, pour tout n de $\mathbf{N}$ $u_{n+1} = u_n + r$. r est appelé **raison** de la suite arithmétique et est indépendant de n.

De proche en proche on obtient : $\boxed{u_n = u_0 + nr}$.

Somme des n premiers entiers non nuls : $1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Somme des n premiers termes d'une suite arithmétique :

$$\sum_{i=0}^{n-1} u_i = u_0 + u_1 + \ldots\ldots + u_{n-1} = \underbrace{n}_{\text{nombre de termes}}\Bigg(\underbrace{\frac{u_0 + u_{n-1}}{2}}_{\text{demi-somme des termes extrêmes}}\Bigg).$$

Remarque : Pour montrer qu'une suite est arithmétique, il faut s'intéresser à la différence $u_{n+1} - u_n$, qui doit être indépendante de n. On remarquera aussi que plus généralement :

$$\boxed{u_n = u_k + (n - k)r} \quad (k \in \mathbf{N})$$

3.2. Raisonnement par récurrence

On veut démontrer qu'une propriété, dépendant du rang n, est vraie à partir d'un certain rang n_0. Il faut montrer que :

1) La propriété est vraie au rang n_0.

2) Quel que soit $n \geq n_0$, si la propriété est vraie jusqu'au rang n, alors elle est vraie au rang suivant, le rang n+1.

Cette méthode est celle du **raisonnement par récurrence**, elle met en forme rigoureusement le raisonnement qu'on fait de « proche en proche ».

Remarque : les 2 parties du raisonnement sont à exprimer, même si la première paraît « évidente ». Le raisonnement peut tomber en défaut si elle n'est pas réalisée.

4. Suites géométriques – Calcul financier

4.1. Suites géométriques

Définition : (u_n) est une suite géométrique s'il existe un réel q non nul, indépendant de n, tel que pour tout n de $\mathbf{N}$: $u_{n+1} = qu_n$. q est la raison de cette suite géométrique.

De proche en proche, ou par récurrence, on obtient: $u_n = u_0q^n$.

Etude de $n \to q^n$

1ercas : $q > 0$

Si $q > 1$ (q^n) est croissante et $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$,

si $0 < q < 1$ (q^n) est décroissante et $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$,

si $q = 1$ (q^n) est constante et égale à 1.

2èmecas : $q < 0$

q^n est positif si n est pair, négatif si n impair. Cette suite est dite **alternée.**

Si $|q| > 1$ (q^n) n'est pas bornée et n'a pas de limite,

si $|q| < 1$ (q^n) est bornée et $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$.

On retiendra que si $q\neq1$:

(q^n) converge si et seulement si $|q| < 1$, et alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$.

Remarque : Pour montrer qu'une suite est géométrique, on peut s'intéresser au quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ $(u_n\neq0)$. On remarquera aussi que plus généralement : $\boxed{u_n = u_k q^{n-k}}$ $(k\in\mathbf{N})$.

Somme des n premiers termes de la suite géométrique (q^n).

$$\text{Si } q \neq 1 : \sum_{i=0}^{n-1} q^i = 1 + q + q^2 + \ldots\ldots + q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{q^{\overset{\text{nombre de termes}}{n}}-1}{q-1}$$

$$\text{Si } q = 1 : \sum_{i=0}^{n-1} q^i = 1 + q + q^2 + \ldots\ldots + q^{n-1} = n.$$

Cas général : $u_n = u_0q^n$ $\quad \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} u_i = u_0 + u_1 + \ldots\ldots + u_{n-1} = u_0\frac{1-q^n}{1-q}$.

D'où si $|\mathbf{q}| < 1$ $\quad \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=0}^{n-1} u_i = \frac{u_0}{1-q}$.

4.2. Calcul financier

4.2.1. Intérêts

Un placement (resp. un emprunt) V_0 sur n années rapporte (resp. coûte) un intérêt calculé au taux annuel i. Au bout de n années, la somme V_0 devient V_n :

$$V_n = V_0 + I$$

Cas des intérêts simples

Les intérêts sont alors retirés chaque année et seul le capital est replacé pour l'année suivante. On a alors: $I = nV_0i$

$$\boxed{V_n = V_0 + nV_0i}$$

Ici (V_n) est une suite arithmétique de raison V_0i.

Remarques : 1) Si i est un taux mensuel n est un nombre de mois, si i est un taux trimestriel, n est un nombre de trimestres …etc
2) La formule précédente reste vraie si n est une fraction. Par exemple si on veut calculer V_n au bout de 8 mois, la formule précédente s'applique avec i annuel et $n = \frac{8}{12}$.

Cas des intérêts composés

Dans ce cadre, les intérêts sont placés avec le capital et portent à leur tour intérêt pour la période suivante. Au bout de la $n^{\text{ième}}$ année (si i est annuel) les intérêts se portent à
$I = V_0i + V_1i + \ldots V_{n-1}i$.

$$V_n = V_{n-1} + V_{n-1}i$$

Ainsi (V_n) est une suite géométrique de raison $(1 + i)$ et

$$\boxed{V_n = V_0(1 + i)^n}$$

Remarque : Les remarques précédentes restent valables. Par exemple, sur 40 mois, si i est annuel, $n = \frac{40}{12} = \frac{10}{3}$ et $V_n = V_0(1 + i)^{10/3}$.

En général on utilise les intérêts simples pour des courtes durées (inférieures à un an). Ces intérêts interviennent essentiellement pour les effets de commerce. Il s'agit, pour certaines entreprises de se faire payer à l'avance par la banque certaines sommes (effets) que le client payera plus tard.
A partir du paragraphe suivant et si ce n'est pas précisé, on considérera que les intérêts sont composés. De même si ce n'est pas précisé, on supposera le taux d'intérêt, annuel.

4.2.2. Actualisation

Toute somme d'argent peut être placée à un taux à peu près identique dans les banques. Ainsi une somme de 1 000 € placée à 5% l'an vaut au bout de 2 ans 1 $000(1.05)^2$ soit 1 102.5 €.

Ainsi la somme de 1 000 €, ne représente pas la même valeur si elle est reçue aujourd'hui ou si elle l'a été il y a deux ans. En effet si elle a été versée il y a deux ans, elle vaut aujourd'hui 1 102.5 €.

Aussi pour comparer 2 sommes à 2 dates différentes, il faut tenir compte de ce phénomène. Et pour ce faire on calcule ces sommes à une même date. Un problème se pose alors : quel taux utiliser ? Dans ce genre de calcul, on utilise un taux dit d'actualisation qui est calculé par les instances financières de façon un peu compliquée. Il tient compte de plusieurs phénomènes conjoncturels économiques. Il vous sera toujours donné.

$$\underset{\text{valeur actuelle}}{V_0} \longrightarrow \underset{\text{valeur acquise}}{V_n}$$

Actualiser V_n à l'année 0, c'est calculer V_0, connaissant V_n. D'après le paragraphe précédent

$$\boxed{V_0 = V_n(1 + i)^{-n}}$$

4.2.3. Annuités constantes (versement en fin de période)

On verse n annuités constantes a, le premier versement ayant lieu à la fin de la première année, la $n^{\text{ième}}$ annuité ayant lieu à la fin de l'année n.

1) Calculons la valeur acquise V_n des ces n annuités au taux annuel i, à la fin de la $n^{\text{ième}}$ année. On peut faire le schéma suivant :

fin année 1   fin année 2   fin année n-1   fin année n

$$
\begin{array}{lr}
 & a \\
 & + \\
a \xrightarrow{\text{1 an}} & a(1+i) \\
 & + \\
a \xrightarrow{\text{(n-2) ans}} & a(1+i)^{n-2} \\
 & + \\
a \xrightarrow{\text{(n-1) ans}} & a(1+i)^{n-1} \\
\hline
 & V_n
\end{array}
$$

$V_n = a(1 + (1+i) + \ldots(1+i)^{n-2} + (1+i)^{n-1})$ et en utilisant la formule :

$$1 + q + q^2 + \ldots\ldots + q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{q^n - 1}{q - 1} \quad \text{avec } q = 1 + i$$

$$\boxed{V_n = a\,\frac{(1+i)^n - 1}{i}}$$

2) Calculons la valeur actuelle V_0 au début de la première année. On peut faire le schéma suivant :

début année 1 fin année 1 fin année 2 fin année n

$$a(1+i)^{-1} \xleftarrow{\text{1 an}} a$$
$$+$$
$$a(1+i)^{-2} \xleftarrow{\text{2 ans}} a$$
$$+$$
$$a(1+i)^{-n} \xleftarrow{\text{n ans}} a$$
$$\overline{}$$
$$V_0$$

$V_0 = a((1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + …..+ (1+i)^{-n})$ et d'après la formule $q^{-1} + q^{-2} + ...+ q^{-n} = \dfrac{1 - q^{-n}}{q - 1}$

(c.f. exemple 11)

$$\boxed{V_0 = a\,\frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}}$$

Remarque : On peut vérifier que $V_n = V_0\,(1 + i)^n$.

4.2.4. Tableaux d'amortissement (annuités constantes)

On considère un emprunt V_0 qui est remboursé selon un échéancier. A chaque échéance (ici on considérera que les échéances sont annuelles), il est d'une part remboursé une partie du capital (= amortissement du capital) et d'autre part versé les intérêts sur les sommes restant dues. Si a_k est l'échéance de l'année k, A_k, l'amortissement du capital correspondant à cette période et I_k, les intérêts payés pour cette même année, on a

$$\boxed{a_k = A_k + I_k}$$

Si V_{k-1} est le capital restant dû au début de l'année k, V_0 est la valeur totale de l'emprunt. Et si i est le taux d'intérêt et n le nombre total d'échéances, on a

$$\boxed{I_k = V_{k-1}i\ ,\ V_k = V_{k-1} - A_k \ \text{ et }\ V_0 = A_1 + \ldots + A_n}$$

L'échéancier, qui récapitule l'ensemble des échéances dans un même tableau, s'appelle le tableau d'amortissement, il précise pour chaque année V_{k-1}, I_k, A_k et a_k.

Ici, on considère un remboursement à annuités constantes. Donc

$$\forall k\ a_k = a$$

Nous pouvons donc utiliser la formule précédente : $V_0 = a\,\dfrac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$ et calculer a dès qu'on connaît V_0 et i.

On calculera $V_1 = V_0 i$, puis $A_1 = a - I_1$. Ainsi la première ligne du tableau est établie et on calcule les autres de la même manière.

Exercices

Exercice 1
Etudier la convergence des suites ci-dessous définies par leur terme général:

1)$u_n = \dfrac{2n^3 - 5n + 1}{n^2 + 3}$ 2)$u_n = \dfrac{2n^2 - 7n - 5}{-n^5 - 1}$ 3) $u_n = \sqrt{4n^2 + n} - 2n$

4)$u_n = \dfrac{\ln n^2}{\sqrt{n+1}}$ 5)$u_n = \dfrac{n^4}{e^n}$ 5)$u_n = (1 + \dfrac{1}{n})^n$.

Exercice 2
Montrer que la suite de terme général $u_n = (-1)^n \dfrac{2n - 1}{n + 1}$ est bornée. Est-elle convergente ? Est-elle monotone?(représenter u graphiquement).

Exercice 3
Soit u la suite définie par $u_n = \dfrac{2^n}{n!}$.
1) Montrer qu'à partir d'un certain rang u est décroissante.
2) Etudier la convergence de u.

Exercice 4
Soit u la suite définie pour tout n par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n \exp(-u_n) \end{cases}$.
1) Montrer que pour tout n, u_n est positif.
2) Etudier la monotonie de u_n.
3) Etudier la convergence de u.

Exercice 5
1) Soit $f(x) = \sqrt{3x + 4}$ pour $x \geq 0$.
a) Montrer que pour tout x et y positifs :
$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{3}{4} |x - y|$$
b) Montrer que pour tout $x > 0$,
$$|f(x) - 4| \leq \frac{3}{4} |x - 4|.$$
2) Soit u la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$. Montrer, en utiliser le résultat de la première question que : $|u_n - 4| \leq 4(\frac{3}{4})^n$. En déduire la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 6
Soit u la suite définie pour tout entier n par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \ln(1 + u_n) \end{cases}$
1) Après avoir étudié le sens de variation de $g : x \to \ln(1 + x) - x$ sur $]0 , +\infty[$, montrer que pour tout $x > 0$: $0 < \ln(1 + x) < x$.
2) Montrer que pour tout entier n, u_n est strictement positif.
3) Déduire de ce qui précède que u converge.

Exercice 7

Soit u la suite définie pour tout entier n par $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = \dfrac{9}{6 - u_n} \end{cases}$.

1) Montrer que pour tout réel x de $]-\infty, 3[$, on a $\dfrac{9}{6 - x} < 3$. Et en déduire que pour tout entier n, u_n est définie.

2) Soit v la suite définie par $v_n = \dfrac{1}{u_n - 3}$. Montrer que v est arithmétique.

3) En déduire u_n en fonction de n et sa limite quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 8

Montrer par récurrence que :

1) $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}$

2) $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$.
(somme des n premiers nombres impairs)

3) $n! > 2^{n-1}$ à partir du rang 3.

Exercice 9

On considère la suite u définie pour tout entier n par $\begin{cases} u_0 = e^3 \\ u_{n+1} = e\sqrt{u_n} \end{cases}$.

1) Calculer u_1, u_2, u_3 en fonction de e.
2) On pose $v_n = \ln u_n - 2$. Montrer que v est une suite géométrique dont on précisera son premier terme et sa raison.
3) En déduire u_n en fonction de n ainsi que sa limite quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 10

Soit u_n la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n - 2 \end{cases}$.

1) On pose $v_n = u_n + 3$. Montrer que v est une suite géométrique dont on donnera son premier terme et sa raison
2) En déduire u_n en fonction de n puis calculer $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$.
3) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

Exercice 11

Soit f et g les fonctions qui à tout réel x associe $f(x) = e^x - 1$ et $g(x)=f(x) - x$.
1) En étudiant les variations de g, montrer que 0 est l'unique solution de l'équation $f(\alpha) = \alpha$.
2) Représenter rapidement la suite u définie par $\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) \\ u_0 = -1 \end{cases}$
3) A l'aide du tableau de variation de g, montrer que u est croissante.
4) Montrer que u est convergente et calculer sa limite.
5) Sans démonstration, en justifiant avec un dessin, préciser le comportement de u si $u_0 = 1$.

Exercice 12

Un capital de 10 000 € est placé à intérêts simples pendant 6 mois au taux annuel i, puis pendant 6 mois au même taux plus 2% (+ 2 points). On désire obtenir 1 130 € d'intérêts en fin de placement. Quel doit être le taux i ? (on suppose que les intérêts des 6 premiers mois sont replacés avec le capital pour les 6 derniers mois).

Exercice 13

Un investisseur a placé une certaine somme à intérêts composés pour une longue période. On dispose des renseignements suivant sur ce placement :
* le montant de la valeur acquise au bout de la 7$^{\text{ème}}$ année s'élève à 177 014.22 €,
* le montant de la valeur acquise au bout de la 10$^{\text{ème}}$ année s'élève à 226 098.34 €,
* le montant des intérêts capitalisés à l'expiration de la durée du placement se monte à 239 974.29 €.

1) Retrouver le taux d'intérêt.
2) Retrouver le capital investi.
3) Déterminer la durée totale du placement.

Exercice 14

Un organisme bancaire propose les contrats suivants :
C_3 : contrat à 3 ans et 4 mois. On investit un capital pendant cette période. A la fin de la période, si l'indice du CAC 40 a augmenté, on récupère son capital, plus une prime de 20% du capital, sinon on ne récupère que son capital.
C_5 : contrat à 5 ans. La prime en cas d'augmentation du CAC 40 est de 40%.
C_8 : contrat à 8 ans et 4 mois. La prime en cas d'augmentation du CAC 40 est de 70%.

1) Dans l'hypothèse où le CAC40 augmente effectivement au cours de ces différentes périodes, calculer le taux annuel, donnant le même rendement, pour un calcul avec intérêts composés, pour chacun des contrats.

2) De plus, on a un droit d'entrée, pris sur le capital versé en début de période, ne fournissant donc pas d'intérêt, de 2% pour les contrats C_5 et C_8. Evaluer, en fonction de la valeur actuelle V_0, la valeur acquise en fin de chacun de ces contrats, puis évaluer comme en 1) le taux annuel donnant le même rendement, toujours sur la base d'intérêts composés.

Exercice 15

Un industriel se propose d'acquérir une machine. Il consulte trois fournisseurs qui lui font chacun une offre.
* Le fournisseur A propose une machine pour 50 000 € comptant.
* Le fournisseur B propose une machine payable en quatre fois :
  10 000 € comptant
  20 000 € après un an
  20 000 € après 2 ans
  10 000 € après trois ans
* Le fournisseur C propose une machine payable en six fois :
  rien au comptant
  10 000 € après un an
  10 000 € après 2 ans
  10 000 € après 3 ans
  15 000 € après 4 ans
  15 000 € après 5 ans
  10 000 € après 6 ans

Sachant que les trois machines sont équivalentes pour l'industriel, et que le taux d'actualisation sur le marché financier est 10.75% l'an, déterminer quelle est l'offre la plus intéressante (pour cela calculer les valeurs actualisées des offres de B et C).

Exercice 16

Un appartement est évalué à 160 000 €. Le propriétaire en propose l'achat aux conditions suivantes :

> 50 000 € comptant plus 18 mensualités de 6 500 €., la première ayant lieu le 15/04/2002 soit 3 mois plus tard, et la dernière le 15/01/2006.

Sachant que le taux d'actualisation est de 9% l'an, est-ce une opération intéressante?

Exercice 17

1) Quel est le montant de l'annuité constante à s'acquitter si au taux de 10% par an, on a obtenu pour l'achat d'un bien de 100 000 €, le règlement par 10 annuités constantes, la première payable immédiatement.
2) Si l'annuité est égale à 19 564. 08 € et si le taux est égal à 12%, combien d'annuités faut-il régler ?

Exercice 18

Établir l'échéancier d'un emprunt de 45 000 € au taux de 8% pendant 8 ans sachant que le remboursement est effectué à annuités constantes.

Exercice 19

Une société emprunte 1 000 000 € qu'elle amortit par annuités constantes sur 10 ans au taux annuel de 10%. Après le paiement de la $5^{\text{ème}}$ annuité, elle rembourse le capital restant dû pour un nouvel emprunt à annuités constantes sur 5 ans, au taux annuel de 6.5%.

1) Construite le tableau d'amortissement relatif aux 5 premières années.
2) Sachant qu'on lui a appliqué une pénalité de 3% sur le capital restant dû du premier emprunt, quelle est l'économie réalisée ?

Indications

Exercice 3 :

1) Calculer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.
2) Montrer que u est minorée.

Exercice 5 :

Utiliser le théorème des gendarmes à $|u_n - 4|$ après avoir remarqué que $0 \leq |u_n - 4| \leq 4(\frac{3}{4})^n$.