Leçon 10 – Exercices

Exercice 1

Soit f : $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ telle que $(x, y, z) \to (x + y + z, x + y + z, x + y + z)$

1) Montrer que f est linéaire.
2) Déterminer Kerf et Imf.
3) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $f^n = f \circ f \circ f \circ \dots \circ f$.

Exercice 2

Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^4$ définie par :
$f(x, y, z) = (x + y, 2x + z, x - z, x + y + z)$.
Cette application est-elle surjective? Injective?

Exercice 3

Soit f une application linéaire : $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ telle que: $f(1, 0, 1, 0) = (2, 4, -1)$
$f(0, 1, 0, 0) = (0, 1, 2)$, $f(0, 0, 1, 1) = (0, 0, -3)$, $f(0, 0, 0, 1) = (2, 2, 0)$.

1) Montrer que ces relations définissent bien f.
2) f est-elle injective ? surjective ? Déterminer le noyau de f.
3) Donner l'image par f d'un vecteur (x, y, z, t) de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 4

Soit f une application linéaire de E dans F et g une application linéaire de F dans G. Montrer que $g \circ f$ est une application linéaire de E dans G.

Exercice 5

Soit f une application linéaire de E dans F définie par :
$f(e_1) = V_1$, $f(e_2) = V_2$ et $f(e_3) = 2V_1 - V_2$ où $B = \{e_1 , e_2 , e_3\}$ est une base de E et où V_1 et V_2 sont linéairement indépendants dans F.
1) Quel est le rang de f ?
2) f est-elle injective ? Déterminer son noyau.
3) Déterminer l'image par f d'un vecteur quelconque de E, en fonction de V_1 et V_2 et de ses coordonnées dans B.

Exercice 6

Soit f : $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que : $f(1, 3) = (2, 1)$, $f(0, 2) = (4, 2)$ et $f(1, 1) = (a, b)$.

A quelles conditions sur a et b ces relations définissent-elles une application linéaire? Déterminer alors son noyau et son rang. Quelle est l'image de (x, y) par f ?

Exercice 7
Soit V le sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par (1, 1, 0) et (1, 0, 1).
Déterminer une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ dont le noyau est V.

Exercice 8
Montrer que les applications linéaires suivantes sont des bijections de $\mathbb{R}^3$:
f telle que $f(x, y, z) = (x, y - z, x + z)$ et g telle que $g(x, y, z) = (x + y, -z, y)$.
Déterminer $fog(x, y, z)$.

Exercice 9
Soit $u : (x, y, z) \to (y + z, 2y, 3y)$.

1) Montrer que u est linéaire.
2) Déterminer Imu, $Im(u^2)$, $Im(u^3)$, …Imu^n, ($u^2 = u \circ u$, $u^3 = u \circ u \circ u$ ....)

Exercice 10
Déterminer l'application linéaire f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ telle que f (1, 0, 1) = 1,
f (0, 1, 1) = 0 et f (1, 2, 0) = 2 et déterminer Kerf.

Exercice 11
Soit $X_1 = (1, 2, 0)$, $X_2 = (1, 3, 0)$ et $X_3 = (0, 0, 1)$ et f une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ telle que $f(X_1) = (1, 0, -1)$, $f(X_2) = (1,-1, 2)$ et $f(X_3) = (2, -1, 3)$.
1) Déterminer une base de $f(\mathbb{R}^3)$ et le rang de f.
2) Déterminer le noyau de f et calculer f(x, y, z).

Exercice 12
Déterminer les matrices des applications linéaires des exercices 1, 2 et 6 dans les bases canoniques des espaces vectoriels qui interviennent.

Exercice 13
Soit f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y, z) = (2x - 3y, x + y)$.
1) Déterminer la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et de $\mathbb{R}^2$.
2) Trouver la matrice de f dans les bases B et B' telles que :
B = {(1, 1, 0) ; (0,-1, 0) ; (0,-1, 1)} et B' = {1, 1) ; (0, -1)}

Exercice 14
Soit f de $\mathbf{IR}^4$ dans $\mathbf{IR}^3$ définie par f(x, y, z, t) = (x – y, 2y + t, -z).
Donner la matrice de f en utilisant les bases suivantes :
B =(1,0,-1,0) , (0,1,1,1) , (1,0,0,-1) , (0,1,1,0)} et
B' = {(1, 1, 1), (1, -1, 1), (1, 1, -1)}.

Exercice 15
Soit f dont la matrice est $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ dans les bases B = {(1, 1, 0); (0, -1, 0); (0, -1, 1)} et
B' = {(1, 1); (0, -1)}, déterminer la matrice de f dans les bases canonique de $\mathbf{IR}^3$ et $\mathbf{IR}^2$.

Exercice 16
Soit f telle que f(x, y) = (x + 2y, x). Déterminer deux vecteurs V_1 et V_2 non colinéaires et tels que $f(V_1)$ et $f(V_2)$ soient colinéaires respectivement à V_1 et V_2. Quelle est alors la matrice de f dans la base $\{V_1, V_2\}$?

Exercice 17
Soit A = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & 3 \\ -1 & 5 & -1 \end{pmatrix}$ la matrice d'une application linéaire f dans la base canonique de $\mathbf{IR}^3$.
Déterminer le rang et le noyau de f.

Soit $V_1 = (1, 1, 1)$, $V_2 = (0, 1, -1)$ et $V_3 = (1, 0, -1)$. Calculer $f(V_1)$, $f(V_2)$ et $f(V_3)$. On note $f(S) = \{f(V_1), f(V_2), f(V_3)\}$. Quel est le rang de f(S)?
Donner la matrice de f dans $\{V_1, V_2, V_3\}$.

Exercice 18
Soit f de $\mathbf{IR}^3$ dans $\mathbf{IR}^2$, définie par : f(x, y, z) = (2x – y, x + 3z).
1) Déterminer la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbf{IR}^3$ et $\mathbf{IR}^2$.
Quels sont le rang et le noyau de f.
2) Soit B = $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ la matrice de l'application g dans la base
B = $\{v_1=(1,2), v_2= (0,-1)\}$ de $\mathbf{IR}^2$ et la base canonique de $\mathbf{IR}^3$.
Donner la matrice de g dans les bases canoniques de $\mathbf{IR}^2$ et $\mathbf{IR}^3$.

Exercice 19
Soit $V_1 = (-1, 1, 0)$, $V_2 = (1, 0, 2)$ et $F = \langle V_1, V_2 \rangle$.
1) A quelle condition sur x, y et z, V = (x, y, z) appartient-il à F ?

2) Soit $V_3 = (1, 1,-1)$, $V_4 = (1, 1, 2)$ et $V_5 = (0, 1,2)$. Déterminer les rangs des systèmes suivants :
$\{ V_1, V_2 , V_3 \}$, $\{V_1 , V_2 , V_4 \}$, $\{ V_1 , V_2 , V_5 \}$ et $\{ V_1, V_2 , V_3 , V_4 \}$.

3) Soit f une application linéaire de $\mathbf{R}^3$ dans $\mathbf{R}^3$ telle que :
$f(1, 0, 0) = V_1$ $f(0, 1, 0) = V_2$ $f(0, 0, 1) = V_5$.
Déterminer f(x, y, z), le rang de f, un système générateur de Imf et le noyau de f.