Leçon 10 – Correction des exercices

Exercice 1

Soit f : **IR**^{3} → **IR**^{3} telle que (x, y, z) → (x + y + z, x + y + z, x + y + z)

1) Montrer que f est linéaire.
2) Déterminer Kerf et Imf.
3) Pour tout n∈N*, calculer $f^n = f \circ f \circ f \circ \ldots \circ f$.

Solution

f : **IR**^{3} → **IR**^{3} telle que f(x, y, z) = (x+y+z, x+y+z, x+y+z)

1) Soit $X_1 = (x_1, y_1, z_1)$ et $X_2 = (x_2, y_2, z_2)$ deux éléments de **IR**^{3} et λ, μ sont deux réels quelconques.
$\lambda X_1 + \mu X_2 = (\lambda x_1+\mu x_2, \lambda y_1+\mu y_2, \lambda z_1+\mu z_2)$
$f(\lambda X_1 + \mu X_2) = f(\lambda x_1+\mu x_2, \lambda y_1+\mu y_2, \lambda z_1+\mu z_2)$
$f(\lambda X_1 + \mu X_2) = (\lambda x_1+\mu x_2+\lambda y_1+\mu y_2+\lambda z_1+\mu z_2, \lambda x_1+\mu x_2+ \lambda y_1+\mu y_2+ \lambda z_1+\mu z_2, \lambda x_1+\mu x_2+ \lambda y_1+\mu y_2+\lambda z_1+\mu z_2)$
$f(\lambda X_1 + \mu X_2) = (\lambda x_1+\lambda y_1+\lambda z_1+\mu x_2+\mu y_2+\mu z_2, \lambda x_1+\lambda y_1+\lambda z_1+\mu x_2+\mu y_2+\mu z_2, \lambda x_1+\lambda y_1+\lambda z_1+\mu x_2+\mu y_2+\mu z_2)$
$f(\lambda X_1 + \mu X_2) = (\lambda(x_1+y_1+z_1) + \mu(x_2+y_2+z_2), \lambda(x_1+y_1+z_1) + \mu(x_2+y_2+z_2), \lambda(x_1+y_1+z_1) + \mu(x_2+y_2+z_2))$
$f(\lambda X_1 + \mu X_2) = \lambda f(X_1) + \mu f(X_2)$ donc f est linéaire.

2) Kerf = {(x, y, z) tel que f(x, y, z) = (0, 0, 0)}

$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x+y+z= 0 \\ x+y+z= 0 \end{cases}$ Donc Kerf = {(x, y, z) ; x+y+z = 0} c'est un sous espace vectoriel de **IR**^{3},

déterminons un base de ce sous espace vectoriel :
v = (x,y,z)∈Kerf si et seulement si v = (x, y, -x – y) = x(1 , 0 , -1) + y(0 , 1 , -1).
{(1 , 0 , -1) , (0 , 1 , -1)} est donc un système générateur de Kerf . D'autre part ce système est libre (les vecteurs ne sont pas proportionnels), c'est donc une base de Kerf et dimKerf = 2.

Imf est le sous espace vectoriel de **IR**^{3} engendré par f (e_1), f (e_2) et f (e_3).
où {e_1 , e_2 , e_3} est la base canonique de **IR**^{3}.
Imf = < (1 , 1 , 1) >. {(1 , 1 , 1)} est une base de Imf et dimImf = 1

3) f^2(x , y, z) = fof(x , y, z) = f(f(x , y , z)) = f(x+y+z, x+y+z, x+y+z) = ((x+y+z) + (x+y+z) + (x+y+z) , (x+y+z) + (x+y+z) + (x+y+z) , (x+y+z) + (x+y+z) + (x+y+z)) = 3(x+y+z, x+y+z, x+y+z).

Montrons par récurrence que f^n(x, y, z) = 3^{n-1}(x+y+z, x+y+z, x+y+z).
La propriété est vraie pour n = 1 et n = 2.
Hypothèse de récurrence : supposons que la propriété est vraie au rang n :
f^n(x, y, z) = 3^{n-1}(x+y+z, x+y+z, x+y+z).
Montrons qu'alors la propriété est vraie au rang n+1, c'est à dire :

$f^{n+1}(x, y, z) = 3^n(x+y+z, x+y+z, x+y+z)$.
$f^{n+1}(x, y, z) = f(f^n(x, y, z)) = f(3^{n-1}(x+y+z, x+y+z, x+y+z))$ d'après l'hypothèse de récurrence.
Donc $f^{n+1}(x, y, z) = 3^{n-1}f(x+y+z, x+y+z, x+y+z) = 3^{n-1}(3(x+y+z, x+y+z, x+y+z)$
et $f^{n+1}(x, y, z) = 3^n(x+y+z, x+y+z, x+y+z)$, d'où le résultat.

Exercice 2
Soit f l'application linéaire de **IR**^{3} dans **IR**^{4} définie par :
$f(x, y, z) = (x + y, 2x + z, x - z, x + y + z)$.
Cette application est-elle surjective? Injective?

Solution

Imf est le sous espace vectoriel de $\mathbf{IR^4}$ engendré par f (e_1), f (e_2) et f (e_3)
où $\{e_1 , e_2 , e_3\}$ est la base canonique de $\mathbf{IR^3}$.
Donc $\dim(\text{Imf}) \leq 3$ et Imf $\neq \mathbf{IR^4}$. f n'est donc pas surjective.

Kerf = {(x, y, z) tel que f(x, y, z) = (0, 0, 0,0)}

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x + z = 0 \\ x - z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

De la troisième équation on déduit x = z, on remplace dans la deuxième et on trouve x = 0, y = 0 et z = 0. Et finalement Kerf = {(0, 0, 0)} et f est injective.

Exercice 3
Soit f une application linéaire : **IR**^{4} $\rightarrow$ **IR**^{3} telle que: f (1, 0, 1, 0) = (2, 4, -1)
f(0, 1, 0, 0) = (0, 1, 2), f(0, 0, 1, 1) = (0, 0, -3), f(0, 0, 0, 1) = (2, 2, 0).

1) Montrer que ces relations définissent bien f.
2) f est-elle injective ? surjective ? Déterminer le noyau de f.
3) Donner l'image par f d'un vecteur (x, y, z, t) de **IR**^{4}.

Solution

1) D'après la

Propriété : Une application linéaire est déterminée dès que l'on connaît l'image d'une base de **E** par f.

Il suffit de démontrer que les 4 vecteurs {(1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1), (0, 0, 0,1)} forment une base de $\mathbf{IR^4}$.

Supposons donc qu'il existe 4 réels λ_1, λ_2, λ_3 et λ_4 tels que : $\lambda_1X_1 + \lambda_2X_2 + \lambda_3X_3+\lambda_4X_4 = \mathbf{0}\ \mathbf{IR^4}$.
Soit λ_1 (1, 0, 1, 0) + λ_2 (0, 1, 0, 0) + λ_3 (0, 0, 1, 1) + λ_4 (0, 0, 0, 1)= (0, 0, 0, 0)
Cette dernière égalité s'écrit :

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \end{cases}$$

Ce système admet la seule solution (0, 0, 0, 0) ce système de 4 vecteurs de $\mathbf{IR^4}$ est libre, c'est une base de $\mathbf{R^4}$ et f est bien définie.

2) D'après le théorème des dimensions : $\boxed{\dim\ker f + \text{rang}(f) = \dim \mathbf{E}}$

Or rang(f) = dimImf ≤ 3 car Imf $\subset \mathbf{R}^3$. Donc dimkerf ≥ 1 et f n'est pas injective.
rang(f) = rang de{ f (1, 0, 1, 0) , f(0, 1, 0, 0) , f(0, 0, 1, 1) , f(0, 0, 0, 1)},
rang(f) = rang de{(2, 4, -1), (0, 1, 2), (0, 0, -3), (2, 2, 0)} ≤ 3. Or $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -6 \neq 0$.

Donc rang(f) = 3 = dimImf. Imf est donc un sous espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$ de dimension 3, et Imf = $\mathbf{R}^3$, f est surjective.

Etant donné l'énoncé, il est judicieux de chercher les coordonnées $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix}$ de (x , y, z, t) dans la base {(1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1), (0, 0, 0,1)}.
Donc (x , y, z, t) = α(1, 0, 1, 0) + β(0, 1, 0, 0) + γ(0, 0, 1, 1) + δ(0, 0, 0,1). D'où le système :
$\begin{cases} x = \alpha \\ y = \beta \\ z = \alpha + \gamma \\ t = \gamma + \delta \end{cases}$. Donc $\alpha = x$, $\beta = y$, $\gamma = -x + z$ et $\delta = x - z + t$. Et
(x , y, z, t) = x(1, 0, 1, 0) + y(0, 1, 0, 0) + (-x + z)(0, 0, 1, 1) + (x – z + t)(0, 0, 0,1)
Donc f(x, y, z, t) = f(x(1, 0, 1, 0) + y(0, 1, 0, 0) + (-x + z)(0, 0, 1, 1) + (x – z + t)(0, 0, 0,1)),
f(x, y, z, t) = x f (1, 0, 1, 0) + yf(0, 1, 0, 0) + (-x + z)f(0, 0, 1, 1) + (x – z + t)f(0, 0, 0, 1),
f(x, y, z, t) = x(2, 4, -1) + y(0, 1, 2) + (-x + z)(0, 0, -3) + (x – z + t)(2, 2, 0),
d'où f(x, y, z, t) = (4x – 2z + 2t , 6x + y – 2z + 2t , 2x + 2y – 3z).

Exercice 4
Soit f une application linéaire de E dans F et g une application linéaire de F dans G. Montrer que gof est une application linéaire de E dans G.

Solution

Soient X et Y deux éléments de **E** et λ et μ sont deux réels quelconques.
gof(λX + μ Y) = g(f(λX + μY)) = g(λf(X)+ μf(Y)) car f est linéaire. De plus,
g(λ f(X) + μ f(Y)) = λg(f(X)) + μg(f(Y)) puis g est linéaire.
Donc gof(λX + μY) = λgof(X)) + μgof(Y) et gof est aussi une application linéaire.

Exercice 5
Soit f une application linéaire de E dans F définie par :
$f(e_1) = V_1$, $f(e_2) = V_2$ et $f(e_3) = 2V_1 - V_2$ où $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ est une base de E et où V_1 et V_2 sont linéairement indépendants dans F.
1) Quel est le rang de f ?
2) f est-elle injective ? Déterminer son noyau.

3) Déterminer l'image par f d'un vecteur quelconque de E, en fonction de V_1 et V_2 et de ses coordonnées dans B.

Solution

1) Le rang de f est le rang du système $\{f(e_1), f(e_2), f(e_3)\} = \{V_1, V_2, 2V_1 - V_2\}$.
Le rang de f est évidemment inférieur ou bégal à 2 et puisque V_1 et V_2 sont indépendants, ce rang est exactement 2.

2) D'après le théorème des dimensions, dimkerf = 3 – 2 = 1 donc f n'est pas injective.
On remarque ici que $-2f(e_1) + f(e_2) + f(e_3) = 0_F$
Donc $f(-2e_1 + e_2 + e_3) = 0_F$ d'où kerf = $< -2e_1 + e_2 + e_3 >$.

3) Soit X de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dans la base **B,** $X = xe_1 + ye_2 + ze_3$

$f(X) = f(xe_1 + ye_2 + ze_3) = xf(e_1) + yf(e_2) + zf(e_3)$ car f est linéaire
$= xV_1 + yV_2 + z(2V_1 - V_2) = (x + 2z) V_1 + (y - z) V_2$.

Exercice 6
Soit $f : IR^2 \rightarrow IR^2$ telle que : f (1, 3) = (2, 1), f (0, 2) = (4, 2) et f (1, 1) = (a, b).
A quelles conditions sur a et b ces relations définissent-elles une application linéaire?
Déterminer alors son noyau et son rang. Quelle est l'image de (x, y) par f ?

Solution

Notons $e_1 = (1,3)$ et $e_2 = (0,2)$. (1, 1) = (1, 3) – (0, 2)) = $e_1 - e_2$ alors pour que f soit linéaire il faut que $f(1, 1) = f(e_1 - e_2) = f(e_1) - f(e_2)$.
Donc il faut (a, b) = (2, 1) – (4, 2) = (-2, -1), soit a = -2 et b = -1.

Et comme $\{e_1, e_2\}$ est une base **B** de $\mathbf{IR^2}$, si f est linéaire, f est bien définie.

Kerf = $\{X \in \mathbf{R}^2 ; f(X) = (0, 0)\}$. Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, les coordonnées de X dans **B**.
f(X) = (0 , 0) si et seulement si $f(xe_1 + ye_2) = (0, 0)$. Soit $xf(e_1) + yf(e_2) = (0, 0)$
ou x(2 , 1) + y(4 , 2) = (0 , 0). D'où :
$\begin{cases} 2x + 4y = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$ soit x = -2y. Et kerf = $<\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}>$ (les coordonnées sont dans **B** bien sûr).
Donc dimkerf = 1 et d'après le théorème des dimensions rang(f) = dimImf = 2 – 1 = 1.
(x , y) = x(1 , 0) + y(0 , 1) et f(x , y) = xf(1 , 0) + yf(0 , 1). Donc pour calculer f(x , y), il suffit de calculer f(1 , 0) et f(0 , 1).
Pour cela déterminons les coordonnées de (1 , 0) et (0 , 1) dans **B**.
$(1, 0) = ae_1 + be_2$ si et seulement si $\begin{cases} 1 = a \\ 0 = 3a + 2b \end{cases}$ soit a = 1 et b = -3/2.
Donc $f(1, 0) = af(e_1 + bf(e_2) = (2, 1) - 3/2(4, 2) = (-4, -2)$.

De même $(0, 1) = ce_1 + de_2$ si et seulement si $\begin{cases} 0 = c \\ 1 = 3c + 2d \end{cases}$ soit c = 0 et d = 1/2.
Et $f(0, 1) = cf(e_1 + df(e_2) = 1/2(4, 2) = (2, 1)$.

D'où $f(x , y) = x(-4 , -2) + y(2 , 1) = (-4x + 2y , -2x + y)$.

Exercice 7
Soit V le sous espace vectoriel de $\mathbf{IR}^3$ engendré par (1, 1, 0) et (1, 0, 1).
Déterminer une application linéaire de $\mathbf{IR}^3$ dans $\mathbf{IR}^2$ dont le noyau est V.

Solution

f est une application linéaire de $\mathbf{IR}^3$ dans $\mathbf{IR}^2$, elle sera déterminée dès qu'on la connaîtra sur une base de $\mathbf{IR}^3$. Or {(1, 1, 0) , (1, 0, 1) , (0 ,0 ,1)} est une base de $\mathbf{IR}^3$, en effet

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

Si on pose f{(1, 1, 0) = (0, 0) , f(1, 0, 1) = (0, 0) et f(0 ,0 ,1) =(a, b) $\neq$ (0, 0). f linéaire ainsi définie convient.

Exercice 8
Montrer que les applications linéaires suivantes sont des bijections de $\mathbf{IR}^3$:
f telle que $f(x, y, z) = (x, y – z, x + z)$ et g telle que $g(x, y, z) = (x + y, -z, y)$.
Déterminer fog(x, y, z).

Solution

Pour montrer que f et g sont des bijections il suffit de montrer qu'elles sont injectives.
On détermine alors kerf
Kerf = {$X\in \mathbf{IR}^3$ tel que f(X)= (0, 0, 0)} soit les solutions du système suivants :

$$\begin{cases} x = 0 \\ y - z = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$$

. Ce système admet la seule solution (0, 0, 0) et f est injective. D'autre part, par le théorème des dimensions dimImf = 3 – 0 = 3. Imf est un sous espace vectoriel de $\mathbf{IR}^3$ de dimension 3, c'est donc $\mathbf{IR}^3$ et f est surjective. f est donc bien bijective.

Kerg = { $X\in \mathbf{IR}^3$ tel que g(X)= (0, 0, 0)} soit les solutions du système suivants :

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ -z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Ce système admet la seule solution (0, 0, 0) et g est injective. D'autre part, par le théorème des dimensions dimImg = 3 – 0 = 3. Img est un sous espace vectoriel de $\mathbf{IR}^3$ de dimension 3, c'est donc $\mathbf{IR}^3$ et g est surjective. g est donc bien bijective.

$fog(x, y, z) = f (g(x, y, z)) = f(x + y, -z , y) = ((x+y), (-z) - y, (x + y) + y)$,
$fog(x, y, z) = (x + y, -z – y, x + 2y)$.

Exercice 9
Soit u : (x, y, z) $\to$ (y + z, 2y, 3y).

1) Montrer que u est linéaire.
2) Déterminer Imu, Im(u^2), Im(u^3), …Imu^n, ($u^2 = u \circ u$, $u^3 = u \circ u \circ u$ ....)

Solution

Soit $X=(x_1, y_1, z_1)$ et $Y=(x_2, y_2, z_2)$ deux éléments de $\mathbf{IR}^3$ et λ et μ sont deux réels quelconques.
$\lambda X+ \mu Y=\lambda(x_1, y_1, z_1) + \mu (x_2, y_2, z_2) = (\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda y_1 + \mu y_2, \lambda z_1 + \mu z_2)$,
$u (\lambda X+ \mu Y) = u (\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda y_1 + \mu y_2, \lambda z_1 + \mu z_2)$,
$u (\lambda X+ \mu Y) = ((\lambda y_1 + \mu y_2) + (\lambda z_1 + \mu z_2), 2(\lambda y_1 + \mu y_2), 3(\lambda y_1 + \mu y_2))$,
$u (\lambda X+ \mu Y) = (\lambda (y_1+z_1) + \mu(y_2+z_2), \lambda (2y_1) + \mu(2y_2), \lambda(3y_1) + \mu(3y_2))$,
$u (\lambda X+ \mu Y) = (\lambda (y_1+z_1), \lambda (2y_1), \lambda(3y_1)) + \mu(y_2+z_2), \mu(2y_2), \mu(3y_2))$,
$u (\lambda X+ \mu Y) = \lambda(y_1+z_1, 2y_1, 3y_1) + \mu(y_2+z_2, 2y_2, 3y_2)$,
$u (\lambda X+ \mu Y) = \lambda u (X) + \mu u (Y)$.
Donc u est linéaire.

Imu est engendré par l'image de la base canonique. u(1, 0 , 0) = (0, 0, 0), u(0, 1, 0) = (1, 2, 3) et u(0, 0, 1) = (1, 0, 0).
D'où Imu = < (1, 2, 3) , (1, 0, 0) >.

$u^2(1, 0, 0) = u(0, 0, 0) = (0, 0, 0)$, $u^2(0, 1, 0) = u(1, 2, 3) = (5, 4, 6)$,
$u^2(0, 0, 1) = u(1, 0, 0) = (0 , 0, 0)$.
D'où Imu^2 = < (5, 4, 6) >.

De même $u^3(1, 0, 0) = u^2(0, 0, 0) = (0, 0, 0)$, $u^3(0, 1, 0) = u^2(1, 2, 3) = u(5, 4, 6) = (10, 8, 12)$,
$u^3(0, 0, 1) = u^2(1, 0, 0) = (0 , 0, 0)$ et Imu^3 = < (10, 8, 12) > = < (5, 4, 6) > = Imu^2.

On en déduit en itérant que si $n \geq 2$ $u^n(1, 0, 0 = u^n(0, 0, 1) = (0, 0, 0)$. Et on peut aisément montrer par récurrence que $u^n(0, 1, 0) = 2^{n-2}(5, 4, 6)$. Donc Im$u^n$ = < (5, 4, 6) > = Imu^2.

Exercice 10
Déterminer l'application linéaire f de $\mathbf{IR}^3$ dans **IR** telle que f (1, 0, 1) = 1,
f (0, 1, 1) = 0 et f (1, 2, 0) = 2 et déterminer Kerf.

Solution

Posons $e_1 = (1, 0, 1)$, $e_2 = (0, 1, 1)$ et $e_3 = (1, 2, 0)$. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$. Donc $\mathbf{B} = \{e_1 , e_2 , e_3\}$ est une base de $\mathbf{IR}^3$ et f est bien définie d'après le cours. Si X a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dans **B**,
$X = xe_1 + ye_2 + ze_3$ et $f(X) = xf(e_1) + yf(e_2) + zf(e_3) = x + 2z$.
D'autre part $X \in$ Kerf si et seulement si f(X) = 0, soit x + 2z = 0. Et X a pour coordonnées

$\begin{pmatrix} -2z \\ y \\ z \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et Kerf = < u , v >, où u et v ont respectivement $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ pour coordonnées dans **B**. Ces deux vecteurs étant indépendants (non proportionnels), ils forment une base de Kerf et dimKerf = 2.

Exercice 11

Soit $X_1 = (1, 2, 0)$, $X_2 = (1, 3, 0)$ et $X_3 = (0, 0, 1)$ et f une application linéaire de $\mathbf{IR}^3$ dans $\mathbf{IR}^3$ telle que $f(X_1) = (1, 0, -1)$, $f(X_2) = (1,-1, 2)$ et $f(X_3) = (2, -1, 3)$.

1) Déterminer une base de $f(\mathbf{IR}^3)$ et le rang de f.

2) Déterminer le noyau de f et calculer f(x, y, z).

Solution

1) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1 \neq 0$, donc **B** = {X1, X_2 , X_3} est une base de $\mathbf{IR}^3$ et f est bien définie. $f(\mathbf{IR}^3) = < f(X_1), f(X_2), f(X_3) > = < (1, 0, -1), (1, -1, 2), (2, -1, 3) >$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -3 + 1 -(2 - 2) = -2 \neq 0$. Donc dimImf = 3 et puisque Imf est sous espace vectoriel de $\mathbf{IR}^3$, $f(\mathbf{IR}^3) = \mathbf{IR}^3$.

2) D'après le théorème des dimensions dimKerf = 0

Kerf = {(0, 0, 0)} f est bijective.

Si X = (x, y, z) a pour coordonnées $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ dans **B**, $X = aX_1 + bX_2 + cX_3$ et

$f(X) = f(x, y, z) = af(X_1) + bf(X_2 + cf(X_3) = a(1, 0, -1) + b(1, -1, 2) + c(2, -1, 3)$. Il suffit donc de calculer les coordonnées de X dans **B**. On a (x, y, z) = a(1, 2, 0) + b(1, 3, 0) + c(0, 0, 1),

soit $\begin{cases} x = a + b \\ y = 2a + 3b \\ z = c \end{cases}$ ou $\begin{cases} 3x - y = a \\ y - 2x = b \\ z = c \end{cases}$ et X = (x, y, z) a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 3x - y \\ y - 2x \\ z \end{pmatrix}$ dans **B**.

Donc f(x, y, z) = (3x – y) (1, 0, -1) + (y – 2x)(1, -1, 2) + z(2, -1, 3) ,

f(x, y, z) = (x + 2z, 2x – y – z, -7x + 3y + 3z).

Exercice 12

Déterminer les matrices des applications linéaires des exercices 1, 2 et 6 dans les bases canoniques des espaces vectoriels qui interviennent.

Solution

$f : \mathbf{IR}^3 \to \mathbf{IR}^3$ telle que $(x, y, z) \to (x + y + z, x + y + z, x + y + z)$

Soit **B** = {e_1, e_2 , e_3} la base canonique de $\mathbf{IR}^3$.

f (e_1) = (1, 1, 1), f (e_2) = (1, 1, 1) et f (e_3) = (1, 1, 1) la matrice de f dans la base canonique de $\mathbf{IR}^3$ au départ et à l'arrivée est alors :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

f (x, y, z) = (x + y, 2x + z, x – z, x + y + z).
f (e_1) = (1, 2, 1, 1), f (e_2) = (1, 0, 0, 1) et f (e_3) = (0, 1, -1, 1) la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbf{IR}^3$ et $\mathbf{IR}^4$ est alors :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

D'après la correction de l'exercice **6**, f(x, y) = (-4x + 2y, -2x + y), donc f(1, 0) = (-4 , -2) et f(0, 1) = (2, 1), d'où la matrice de f dans la base canonique de $\mathbf{IR}^2$ au départ et à l'arrivée : $\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 13
Soit f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par f(x, y, z) = (2x - 3y, x + y).
1) Déterminer la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbf{IR}^3$ et de $\mathbf{IR}^2$.
2) Trouver la matrice de f dans les bases B et B' telles que :
B = {(1, 1, 0) ; (0,-1, 0) ; (0,-1, 1)} et B' = {1, 1) ; (0, -1)}

Solution

1) Les colonnes de la matrice **m** de f dans les bases canoniques, sont les coordonnées des images des vecteurs (1, 0, 0), (0, 1, 0) et (0, 0, 1) dans la base canonique de $\mathbf{IR}^2$.
f(1, 0, 0) = (2, 1), f(0, 1, 0) = (-3, 1) et f(0, 0, 1) = (0, 0). Et les coordonnées de (2, 1) , (-3, 1) et (0, 0) dans la base canonique de $\mathbf{IR}^2$ sont respectivement $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. On obtient donc : $\mathbf{m} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

2) Si **m'** est la matrice de f dans **B** et **B'**, **m'** a donc pour colonnes les coordonnées des vecteurs de f(**B**) dans la base **B**'.

Or f (1, 1, 0) = (-1, 2), cherchons les coordonnées $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ de (-1, 2) dans **B'** :

(-1, 2) = a (1, 1) + b (0, -1), donc $\begin{cases} -1 = a \\ 2 = a - b \end{cases}$ les coordonnées de f (1, 1, 0) dans **B'** sont donc $\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

f (0, -1, 0) = (3, -1), cherchons les coordonnées $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ de (3, -1) dans **B'**.

(3, -1) = a (1, 1) + b (0, -1), donc $\begin{cases} 3 = a \\ -1 = a - b \end{cases}$ les coordonnées de f (0, -1, 0) dans **B'** sont donc

$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

f (0, -1, 1) = (3, -1) = f(0, -1, 0) a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ dans **B'**. On obtient donc

m'=$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 \\ -3 & 4 & -4 \end{pmatrix}$.

Exercice 14
Soit f de **IR**^{4} dans **IR**^{3} définie par f(x, y, z, t) = (x – y, 2y + t, -z).
Donner la matrice de f en utilisant les bases suivantes :
B =(1,0,-1,0) , (0,1,1,1) , (1,0,0,-1) , (0,1,1,0)} et
B' = {(1, 1, 1), (1, -1, 1), (1, 1, -1)}.

Solution

La matrice **m** de f dans B et B' a pour colonnes les coordonnées des vecteurs de f(**B**) dans la base **B**'.
f(1, 0, -1, 0) = (1, 0, 1), f (0, 1, 1, 1) = (-1, 3, -1), f (1, 0, 0, -1) = (1, -1, 0)
et f (0, 1, 1, 0) = (-1, 2, -1).
Déterminons les coordonnées de ces vecteurs dans la base **B'**.

Si (1, 0, 1) a pour coordonnées $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ dans la base **B',**

(1, 0, 1) = a (1, 1, 1) + b (1, -1, 1) + c (1, 1, -1). Soit $\begin{cases} a+b+c = 1 \\ a-b+c = 0 \\ a+b-c = 1 \end{cases}$ ou $\begin{cases} a+b+c = 1 \\ 2b = 1 \\ 2c = 0 \end{cases}$.

Les coordonnées de (1, 0, 1) dans **B'** sont donc $\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Si (-1, 3, -1) a pour coordonnées $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ dans la base **B',**

(-1, 3, -1) = a (1, 1, 1) + b (1, -1, 1) + c (1, 1, -1). Soit $\begin{cases} a+b+c = -1 \\ a-b+c = 2 \\ a+b-c = -1 \end{cases}$ ou $\begin{cases} a+b+c = -1 \\ 2b = -4 \\ 2c = 0 \end{cases}$.

Les coordonnées de (-1, 3, -1) dans **B'** sont donc $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Si (1, -1, 0) a pour coordonnées $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ dans la base **B',**

(1, -1, 0) = a (1, 1, 1) + b (1, -1, 1) + c (1, 1, -1). Soit $\begin{cases} a+b+c = 1 \\ a-b+c = -1 \\ a+b-c = 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} a+b+c = 1 \\ 2b = 2 \\ 2c = 1 \end{cases}$.

Les coordonnées de (1, -1, 0) dans **B’** sont donc $\begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}$

Si (-1, 2, -1) a pour coordonnées $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ dans la base **B’,**

(-1, 2, -1) = a (1, 1, 1) + b (1, -1, 1) + c (1, 1, -1). Soit $\begin{cases} a+b+c = -1 \\ a-b+c = 2 \\ a+b-c = -1 \end{cases}$ ou $\begin{cases} a+b+c= -1 \\ 2b = -3 \\ 2c = 0 \end{cases}$.

Les coordonnées de (-1, 2, -1) dans **B’** sont $\begin{pmatrix} 1/2 \\ -3/2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Et donc $\mathbf{m} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -2 & 1 & -3/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 15

Soit f dont la matrice est $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ dans les bases B = {(1, 1, 0); (0, -1, 0); (0, -1, 1)} et B' = {(1, 1); (0, -1)}, déterminer la matrice de f dans les bases canonique de $\mathbf{IR}^3$ et $\mathbf{IR}^2$.

Solution

Soit **C** la base canonique de $\mathbf{IR}^3$ et **C'** celle de $\mathbf{IR}^2$.
La matrice de f dans les bases **B** = {(1, 1, 0); (0, -1, 0); (0, -1, 1)} et
B' = {(1, 1); (0, -1)} est : $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ ceci équivaut à dire que

f (1, 1, 0) = 3(1, 1) = (3, 3)
f (0, -1, 0) = (1, 1) + (0, -1) = (1, 0)
f (0, -1, 1) = -(1, 1) + 4 (0, -1) = (-1, -5).

La matrice demandée a pour colonnes les coordonnées de f(1, 0, 0), f(0, 1, 0) et f(0, 0, 1) dans **C'**.
Remarquons que (1, 0, 0) = (1, 1, 0) + (0, -1, 0) (autrement dit (1, 0, 0) a pour coordonnées

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ dans **B**) et f(1, 0, 0)) = f(1, 1, 0) + f(0, -1, 0) = (3, 3) + (1, 0) = (4, 3).
De même (0, 1, 0) = -(0, -1, 0) et f(0, 1, 0) = -f(0, -1, 0) = -(1, 0) = (-1, 0)
Et (0, 0, 1) = (0, -1, 1) – (0, -1, 0) et f(0, 0, 1) = (-1, -5) – (1, 0) = (-2, -5). D'où la matrice de f

dans **C** et **C'** : $\begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 3 & 0 & -5 \end{pmatrix}$.

Exercice 16

Soit f telle que f(x, y) = (x + 2y, x). Déterminer deux vecteurs V_1 et V_2 non colinéaires et tels que $f(V_1)$ et $f(V_2)$ soient colinéaires respectivement à V_1 et V_2. Quelle est alors la matrice de f dans la base $\{V_1, V_2\}$?

Solution

Si $V_1 = (x, y)$, $f(V_1) = (x + 2y, x)$ est colinéaire à V_1 si et seulement si il existe un réel λ tel que $f(V_1) = \lambda V_1$, soit $\begin{cases} x + 2y = \lambda x \\ x = \lambda y \end{cases}$ ou $\begin{cases} x + 2y = \lambda x \\ x = \lambda y \end{cases}$. C'est équivalent à $\begin{cases} y(\lambda + 1)(\lambda - 2) = 0 \\ x = \lambda y \end{cases}$. y = 0 n'est pas solution car cela implique x = 0 ($V_1 = 0$ n'est pas solution car V_1 et V_2 sont non colinéaires donc non nuls). On en déduit alors que nécessairement $\lambda = -1$ ou $\lambda = 2$.

Si $\lambda = -1$, $\begin{cases} x + 2y = -x \\ x = -y \end{cases}$ et $V_1 = (1, -1)$ convient.

Si $\lambda = 2$, $\begin{cases} x + 2y = 2x \\ x = 2y \end{cases}$ et $V_2 = (2, 1)$ convient.

On a donc $f(V_1) = -V_1$ et $f(V_2) = 2V_2$, la matrice de f dans la base $\{V_1 , V_2\}$ est donc : $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 17

Soit A = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & 3 \\ -1 & 5 & -1 \end{pmatrix}$ la matrice d'une application linéaire f dans la base canonique de $\mathbf{IR}^3$.

Déterminer le rang et le noyau de f.

Soit $V_1 = (1, 1, 1)$, $V_2 = (0, 1, -1)$ et $V_3 = (1, 0, -1)$. Calculer $f(V_1)$, $f(V_2)$ et $f(V_3)$. On note $f(S) = \{f(V_1), f(V_2), f(V_3)\}$. Quel est le rang de f(S)?

Donner la matrice de f dans $\{V_1, V_2, V_3\}$.

Solution

Le rang de f est le rang du système {(1, 3, -1), (1, -3, 5), (1, 3, -1)}

0n remarque que le premier vecteur est égal au troisième et que les deux premiers vecteurs ne sont pas colinéaires donc le rang de f est 2.

D'après le théorème des dimensions dimkerf = 3 – 2 = 1

Kerf = {X = (x, y, z) $\mathbf{R}^3$ tel que f(x, y, z) = (0, 0, 0)}.

Or (x, y, z) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1) et

f(x, y, z) = xf(1, 0, 0) + yf(0, 1, 0) + zf(0, 0, 1) = x(1, 3, -1) + y(1, -3, 5) + z(1, 3, -1) .

Donc f(x, y, z) = (x + y + z , 3x – 3y + 3z , -x + 5y – z) et X = (x, y, z)$\in$ Kerf si et seulement si : $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 3x - 3y + 3z = 0 \\ -x + 5y - z = 0 \end{cases}$, soit $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 6y = 0 \\ -x - z = 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} z = -x \\ y = 0 \end{cases}$. Donc X = (x, y, z)$\in$ Kerf si et seulement si X = (x, 0, -x) = x(1, 0, -1) . Donc Kerf = < (1, 0, -1) > et dimKerf = 1.

Exercice 18

Soit f de **IR** ^{3} dans **IR**^{2}, définie par : f(x, y, z) = (2x – y, x + 3z).

1) Déterminer la matrice de f dans les bases canoniques de **IR**^{3} et **IR**^{2}.

Quels sont le rang et le noyau de f.

2) Soit B = $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ la matrice de l'application g dans la base

B = {v_1=(1,2), v_2= (0,-1)} de **IR**^{2} et la base canonique de **IR**^{3}.

Donner la matrice de g dans les bases canoniques de **IR**^{2} et **IR**^{3}.

Solution

1) f (1, 0, 0) = (2, 1) ; f (0, 1, 0) = (-1, 0) et f (0, 0, 1) = (0, 3).

Et la matrice de f dans les bases canoniques de **IR**^{3} et **IR**^{2} est : $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Le rang de f est 2 car Imf est engendré par (2, 1), (-1, 0) et (0, 3).

D'après le théorème des dimensions dimKerf = 3 – 2 = 1.

X = (x, y, z)$\in$ Kerf si et seulement si f(x, y, z) = (0, 0) soit $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ x + 3z = 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} y = 2x \\ z = (-1/3)x \end{cases}$

et X = (x, 2x, (-1/3)x) =x(1, 2, -1/3). Donc Kerf = < (1, 2, -1/3) >.

2) g (v_1) = (1, -2, 0) et g(v_2) = (3, 1, -1).

Or (1, 0) = v_1 + 2v_2. Donc g(1, 0) = (1, -2, 0) + 2(3, 1, -1) = (7, 0, -2). Et (0, 1) = -v_2, donc g(0, 1) = -(3, 1, -1) = (-3, -1, 1). D'où la matrice de g dans les bases canoniques de **IR**^{2} et **IR**^{3} :

$$\begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 0 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 19

Soit V_1 = (-1, 1, 0), V_2 = (1, 0, 2) et F = < V_1, V_2 >.

1) A quelle condition sur x, y et z, V = (x, y, z) appartient-il à F ?

2) Soit V_3 = (1, 1,-1), V_4 = (1, 1, 2) et V_5 = (0, 1,2). Déterminer les rangs des systèmes suivants :

{ V_1, V_2 , V_3 } , {V_1 , V_2 , V_4 } , { V_1 , V_2 , V_5 } et { V_1, V_2 , V_3 , V_4 } .

3) Soit f une application linéaire de $\mathbf{R}^3$ dans $\mathbf{R}^3$ telle que :

f(1, 0, 0) = V_1 f(0, 1, 0) = V_2 f(0, 0, 1) = V_5 .

Déterminer f(x, y, z), le rang de f, un système générateur de Imf et le noyau de f.

Solution

1) V_1 et V_2 étant indépendants, d'après une propriété vue dans la correction de l'exercice 22 de

la leçon 9, $V \in F$ si et seulement si $\{V_1 , V_2 , V\}$ est lié, soit $\begin{vmatrix} -1 & 1 & x \\ 1 & 0 & y \\ 0 & 2 & z \end{vmatrix} = 0$, ou $2x + 2y - z = 0$.

2) Rang de $S_1 = \{V_1 , V_2 , V_3\}$:

$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$. Le système S_1 est donc libre et de rang 3.

Rang de $S_2 = \{V_1 , V_2 , V_4\}$:

$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$. Le système S_2 est donc libre et de rang 3.

Rang de $S_3 = \{V_1 , V_2 , V_5\}$:
Les coordonnées de V_5 vérifient $2x + 2y - z = 0$, donc $V_5 \in F$ et S_3 est de rang 2.
Rang de $S_4 = \{ V_1, V_2 , V_3 , V_4 \}$. S_4 est de rang inférieur ou égal à 3 puisqu'il est formé de vecteurs de $\mathbf{R}^3$ et puisque $S_1 \subset S_4$ est de rang 3, S_4 est de rang 3.

$(x, y, z) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1)$, donc
$f(x, y, z) = xf(1, 0, 0) + yf(0, 1, 0) + zf(0, 0, 1) = x(-1, 1, 0) + y(1, 0, 2) + z(0, 1, 2)$, d'où
$f(x, y, z) = (-x + y, x + z, 2y + 2z)$.
Le rang de f est par définition celui de S_3 et égale 2.
$\mathrm{Im} f = \langle V_1 , V_2 , V_5 \rangle = \langle V_1 , V_2 \rangle = F$.

$V = (x, y, z) \in \mathrm{Ker} f$ si et seulement si $f(x, y, z) = (0, 0, 0)$ soit $\begin{cases} -x + y = 0 \\ x + z = 0 \\ 2y + 2z = 0 \end{cases}$ ou $x = y = -z$ et

$V = (x, x, -x) = x(1, 1, -1)$. Donc $\mathrm{Ker} f = \langle V_3 \rangle$.