Leçon 10 – Correction des "exercez-vous"

Exercez-vous 4

Soit $f_1 : IR^3 \rightarrow IR^3$ $\quad$ $f_2 : IR^2 \rightarrow IR^3$ $\quad$ et $\quad$ $f_3 : IR^3 \rightarrow IR^3$

$(x,y,z) \rightarrow (2x+y,y-z,z-2x)$ $\quad$ $(x,y) \rightarrow (3x,2y-x,x-y)$ $\quad$ $(x,y,z) \rightarrow (x-y,x+y+z,z+2x)$

Déterminer le rang, une base de l'espace image et le noyau de chacune des applications linéaires f_1, f_2 et f_3.

Solution

Considérons d'abord f_1 : $\text{rang} f_1 = \dim f_1(\mathbf{IR}^3)$. Or $f_1(\mathbf{IR}^3)$ est engendré par les images de la bases canonique de $\mathbf{IR}^3$, soit : $\{(2,0,-2) , (1,1,0) , (0,-1,1)\}$

Or $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 2 + 0$, le système est donc libre et c'est une base de $f_1(\mathbf{IR}^3)$ qui est donc de dimension 3. Ainsi $\text{rang} f_1 = 3$.

$v = (x, y, z) \in \ker f_1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 0 \\ y - z = 0 \\ z - 2x = 0 \end{cases}$ soit $x = y = z = 0$ donc $\ker f_1 = \{(0,0,0)\}$ et f_1 est injective (ce résultat était prévisible étant donné le théorème des dimensions).

Considérons f_2 : l'image de la base canonique de $\mathbf{IR}^2$ par f_2 est : $\{3,-1,1) ; (0,2,-1)\}$. Or ces deux vecteurs sont indépendants (coordonnées non proportionnelles) et forment donc une base de $f_2(\mathbf{IR}^2)$. Donc $\text{rang} f_2 = 2$.

$v(x,y) \in \ker f_2 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 0 \\ 2y - x = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$ soit $x = y = 0$ donc $\ker f_2 = \{(0,0)\}$ et f_2 est injective. (Ici aussi on aurait pu utiliser le théorème des dimensions).

Considérons f_3 : l'image de la base canonique de $\mathbf{IR}^3$ est :

$S = \{(1,1,2) , (-1,1,0) , (0,1,1)\}$. Or $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 + 1 = 0$. Les vecteurs de S sont donc liés. Mais les deux premiers, par exemple, sont indépendants et forment une base de $f_3(\mathbf{IR}^3)$. S est donc de rang 2 et $\dim f_3(\mathbf{IR}^3) = \text{rang} f_3 = 2$. Le théorème des dimensions nous permet d'affirmer que $\dim(\ker f_3) = 1$ et f n'est pas injective. Précisons $\ker f_3$

$v(x, y, z) \in \ker f_3 \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ x + y + z = 0 \\ z + 2x = 0 \end{cases}$ soit $\begin{cases} y = x \\ z = -2x \end{cases}$.

$v(x, y, z) = (x, x,-2x) = x(1, 1,-2)$, on retrouve donc que $\ker f_3$ est de dimension 1. $\text{Ker} f_3$ est engendré par $(1, 1,-2)$. $\ker f_3 = < (1, 1,-2) >$