

Leçon 10 – Correction des "exercez-vous"

Exercez-vous 2

Les applications suivantes sont-elles linéaires ?

- 1) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ telle que $f(x, y, z) = (x+y, -2z)$.
- 2) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ telle que $f(x, y) = (2x+y, 2y, x-1)$.
- 3) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x, y) = xy + 2x$.
- 4) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x, y, z) = 2z - x$.

Solution

1) Si $X_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $X_2 = (x_2, y_2, z_2)$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$:
 $f(\lambda X_1 + \mu X_2) = (\lambda x_1 + \mu x_2 + \lambda y_1 + \mu y_2, -2(\lambda z_1 + \mu z_2))$
Soit $f(\lambda X_1 + \mu X_2) = \lambda(x_1 + y_1, -2z_1) + \mu(x_2 + y_2, -2z_2) = \lambda f(X_1) + \mu f(X_2)$. f est donc bien linéaire.

2) $f(0,0) = (0,0,-1) \neq (0,0,0)$. f n'est donc pas linéaire.

3) $f(1,0) = 2$, $f(0,1) = 0$ et $f(1,1) = 3 + 2 + 0$. f n'est donc pas linéaire puisque $f(X_1 + X_2) \neq f(X_1) + f(X_2)$ si $X_1 = (1,0)$ et $X_2 = (0,1)$.

4) Si $X_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $X_2 = (x_2, y_2, z_2)$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$:
 $f(\lambda X_1 + \mu X_2) = 2(\lambda z_1 + \mu z_2) - (\lambda x_1 + \mu x_2) = \lambda(2z_1 - x_1) + \mu(2z_2 - x_2)$ et
 $f(\lambda X_1 + \mu X_2) = \lambda f(X_1) + \mu f(X_2)$.
Ainsi f est linéaire.