Leçon 10 – Correction des "exercez-vous"

Exercez-vous 1

Soit f : $\mathbf{IR} \to \mathbf{IR}^2$

$x \to \dfrac{2}{x^2 + 2x + 3}$. f est-elle injective? f est-elle surjective ? Si non, déterminer A et B, les plus grands possibles tels que f soit une bijection de A dans B.

Solution

Remarquons d'abord que $f(x) = \dfrac{2}{(x + 1)^2 + 2}$.

*Supposons que $f(x_1) = f(x_2)$ et cherchons si alors la seule solution est : $x_1 = x_2$

Or : $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow \dfrac{2}{(x_1 + 1)^2 + 2} = \dfrac{2}{(x_2 + 1)^2 + 2}$ soit $(x_1 + 1)^2 = (x_2 + 1)^2$.

D'où $x_1 + 1 = \pm(x_2 + 1)$ (1).

Et (1) a deux solutions sur **IR** : $x_1 = x_2$ et $x_1 = -x_2 - 2$.

f n'est donc pas injective sur **R**. Par contre sur A =[-1 , +∞[(ou]-∞ , -1]), (1) a une et une seule solution $x_1 = x_2$ et f est injective.

*Soit y un réel donné; cherchons s'il existe un réel x tel que f(x) = y.

Or $f(x) = y \Leftrightarrow \dfrac{2}{(x + 1)^2 + 2} = y$,

soit $\dfrac{2}{y} - 2 = (x + 1)^2$ (2).

Or cette dernière équation a une solution si $y \neq 0$ et $\dfrac{2}{y} - 2 \geq 0$, soit $\dfrac{2 - 2y}{y} \geq 0$. Donc pour que (2) ait une solution, il faut donc que $y \in]0 , 1]$, on a alors

$x = 1 \pm \sqrt{\dfrac{2 - 2y}{y}}$. f est donc surjective si l'ensemble d'arrivée est B =]0 , 1] et f est une bijection de A dans B.