Leçon 10 – Cours : Applications linéaires

Objectif : L'objectif de cette leçon est de généraliser la notion de linéarité (dite aussi proportionnalité et la fameuse règle de trois) sur les espaces vectoriels et donc d'acquérir les différentes notions liées aux applications linéaires et à leurs caractéristiques qui sont le noyau et l'image.

Cette leçon est dans le prolongement de la leçon 9 qui en est un pré-requis. Ces deux leçons sont des pré-requis indispensables à la compréhension du calcul matriciel, outil très utilisé en économie et statistiques et développé en L2.

1. Définitions et propriétés

1.1. Rappel sur les applications

Soit f une application d'un ensemble **E** dans un ensemble **F**.

f est **injective** si et seulement si deux éléments distincts de **E**, ont des images distinctes par f :

$$(\text{f est injective}) \Leftrightarrow (x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x'))$$

On peut aussi écrire : (f est injective) $\Leftrightarrow$ $(f(x) = f(x') \Rightarrow x = x')$

f est **surjective** si et seulement si tout élément de **F** a un **antécédent** par f :

$$(\text{f est surjective}) \Leftrightarrow (\forall y \in \mathbf{F} \;\; \exists x \in \mathbf{E} \; ; \; y = f(x))$$

Soit $f(\mathbf{E}) = \mathbf{F}$

f est **bijective** si et seulement si f est à la fois **injective** et **surjective**. Tout élément y de **F** a un et un seul antécédent par f :

$$\forall y \in \mathbf{F} \;\; \exists x \in \mathbf{E}, \textbf{ unique} \; ; \; y = f(x)$$

De façon pratique, pour montrer que f est bijective, on montre souvent que pour tout y de **F**, l'équation y = f(x) a une et une seule solution dans **E**.

Exemple :
Considérons **E** = **F** = **IR** et f, l'application de **IR** dans **IR** telle que $f(x) = x^2$.

f n'est pas injective puisque deux réels opposés ont même carré et donc même image par f.

Par contre si on remplace **E** par $\mathbf{IR}^+$. f est une **injection** de $\mathbf{IR}^+$ dans **IR**.

Un carré est toujours positif et si y est strictement négatif, il n'existe pas x tel que $y = x^2$, et y n'a pas d'antécédent par f. f n'est donc pas surjective si **F** = **IR**, par contre si $\mathbf{F} = \mathbf{IR}^+$, f est une **surjection**.

f est une **bijection** de $\mathbf{IR}^+$ dans $\mathbf{IR}^+$.

1.2. Applications linéaires

Dans cette leçon, on considérera des espaces vectoriels **E** et **F** de dimension finie sur **IR** et on notera dim**E** = n et dim**F** = p.

Définition : Soit **E** et **F** deux espaces vectoriels sur un **R** et f une application de **E** dans **F**.

(f est une **application linéaire**) $\Leftrightarrow$ ($\forall$X et Y de **E**, $\forall\lambda\in$**R** f(X+Y)=f(X)+f(Y) et f(λX)=λf(X))

Conséquences :

1) f(E) (ensemble des images de E par f), noté aussi **Imf** est un sous-espace vectoriel de F.

2) $\forall X_i\in E$ et $\forall\lambda_i\in R$, $f(\sum_{i=1}^{q} \lambda_i X_i) = \sum_{i=1}^{q} \lambda_i f(X_i)$

3) Pour montrer qu'une application est linéaire, il suffit de montrer que :

$\forall$X et Y de E, $\forall\lambda$ et μ de R, $f(\lambda X + \mu Y) = \lambda f(X) + \mu f(Y)$.

($\lambda = \mu = 1$ donne la première égalité de la définition et $\mu = 0$ donne la deuxième).

4) Si f est linéaire alors $f(0_E) = 0_F$ (poser $\lambda = 0$ dans la définition).

5) L'image d'un système lié est un système lié.

Démonstration

Il reste à montrer 1) et 2) et 5):

1) On remarque que Imf contient $\mathbf{0}_F$ car $f(\mathbf{0}_E)= \mathbf{0}_F$ donc Imf différent du vide.
Soient f(X) et f(Y) deux éléments de Imf et λ, μ , deux réels :
$\lambda f(X) + \mu f(Y) = f(\lambda X + \mu Y)$ car f est linéaire et puisque E est un sous-espace vectoriel $\lambda X + \mu Y$ est un élément de E et $f(\lambda X + \mu Y)$ est un élément de ImF . Et Imf est un sous-espace vectoriel de F.

2) $f(\sum_{i=1}^{q} \lambda_i X_i) = f(\lambda_1 X_1 + \sum_{i=2}^{q} \lambda_i X_i) = f(\lambda_1 X_1) + f(\sum_{i=2}^{q} \lambda_i X_i) = \lambda_1 f(X_1) + f(\sum_{i=2}^{q} \lambda_i X_i) =$

$= \lambda_1 f(X_1) + f(\lambda_2 X_2 + \sum_{i=3}^{q} \lambda_i X_i) = \lambda_1 f(X_1) + f(\lambda_2 X_2) + f(\sum_{i=3}^{q} \lambda_i X_i) = \lambda_1 f(X_1) + \lambda_2 f(X_2) + f(\sum_{i=3}^{q} \lambda_i X_i) \ldots$
et ainsi de suite . On obtient alors

$f(\sum_{i=1}^{q} \lambda_i X_i) = \sum_{i=1}^{q} \lambda_i f(X_i)$.

5) Soit $\{X_1, .., X_q\}$ **un système lié de E** alors il existe des $\lambda_i\in$**IR**, non tous nuls tels que : $\sum_{i=1}^{q} \lambda_i X_i = 0$.

D'après 2) et 4) : $\sum_{i=1}^{q} \lambda_i f(X_i) = f(\sum_{i=1}^{q} \lambda_i X_i) = \sum_{i=1}^{q} \lambda_i f(X_i) = \mathbf{0}_F$. Et puisque les des λ_i ne sont pas tous nuls, le système des $f(X_i)$ est lié.

Propriété : Une application linéaire est déterminée dès que l'on connaît l'image d'une base de **E**.

En effet soit $\mathbf{B} = \{e_1 , e_2 , \dots , e_n\}$ et $f(e_i) = f_i$ pour i = 1, 2,…, n.

Si $X = \sum_{i=1}^{n} x_ie_i$ (décomposition unique), $f(X) = f(\sum_{i=1}^{n} x_ie_i) = \sum_{i=1}^{n} x_if(e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_if_i$.

Et f(X) est déterminé de façon unique.

Les vecteurs f_i de **F** forment un système générateur de f(**E**) = Imf, ensemble image de **E** par f :
Imf = f(**E**) = < f(**B**)>.
Et le rang de ce système $f(\mathbf{B}) = \{f_1 , \dots , f_n\}$ est la dimension de f(**E**). On a la définition suivante :

Définition : Le rang de l'application linéaire f est la dimension de f(**E**), c'est le rang du système f(**B**), image d'une base **B** de **E** par f. On le note rang(f).

Remarque :
1) f(**E**) ⊂ **F** donc $\boxed{\textbf{rang(f)} \leq \textbf{dimF}}$.
2) Et si f est surjective rang(f) = dimf(**E**) = dim**F**.
3) rang(f) est le rang des f_i qui forment un système de n (=dim**E**) vecteurs, donc $\boxed{\textbf{rang(f)} \leq \textbf{dimE}}$.

2. Noyau d'une application linéaire – théorème des dimensions

Définition : On appelle **noyau** de l'application linéaire f , $f^{-1}(\mathbf{0}_F)$, c'est à dire l'image réciproque de $\mathbf{0}_F$ par f. Ce noyau est noté kerf.

$$X \in \ker f \Leftrightarrow f(X) = \mathbf{0}_F.$$

Propriété : kerf est un sous-espace vectoriel de **E**

Démonstration

On remarque que kerf contient $\mathbf{0}_E$ car $f(\mathbf{0}_E)= \mathbf{0}_F$ donc kerf différent du vide
Soient X et Y deux éléments de kerf et λ, μ , deux réels
$f(\lambda X + \mu Y) = \lambda f(X) + \mu f(Y)$ car f est linéaire or comme X et Y sont des éléments de kerf on a alors : $f(X)= \mathbf{0}_F$ et $f(Y)= \mathbf{0}_F$ d'où
$f(\lambda X + \mu Y) = \lambda f(X) + \mu f(Y) = \mathbf{0}_F$ et donc $\lambda X + \mu Y$ est un élément de kerf . kerf est bien un sous–espace vectoriel de **E**.

Propriété : (f est injective) ⇔ (kerf = $\{\mathbf{0}_E\}$).

Démonstration

Supposons f injective et soit X un élément de kerf.
Donc $f(X) = \mathbf{0}_F = f(\mathbf{0}_F)$ et puisque f est injective, $X = \mathbf{0}_E$.
Réciproque : Supposons que kerf = { $\mathbf{0}_E$.}. Si f(X) = f(Y) alors $f(X-Y) = \mathbf{0}_F$ et
$X-Y \in$ kerf. Donc $X-Y = \mathbf{0}_E$, et X = Y. D'où le résultat.

Théorème : Si f est une application linéaire **injective** de **E** dans **F**, alors l'image par f de tout système libre de **E** est un système libre de **F**.

Démonstration
Supposons f injective et soit $S = \{X1 , X_2, \dots, X_r \}$, un système libre de r vecteurs de **E**. $f(S) = \{f(X_1) , f(X_2) , \dots, f(X_r)\}$.
Supposons que $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i f(X_i) = \mathbf{0}_F$, puisque f est linéaire, $f(\sum_{i=1}^{r} \lambda_i X_i) = \mathbf{0}_F$ et puisque f est injective : $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i X_i = \mathbf{0}_E$. Or par hypothèse, S est libre donc $\lambda_i = 0$ pour i=1, 2,…, r et f(S) est libre.

Théorème (des dimensions): Soit **E** un espace vectoriel de dimension finie et f une application linéaire de **E** dans un espace vectoriel **F**. Alors :

$$\dim\ker f + \mathrm{rang}(f) = \dim \mathbf{E}$$

Démonstration
Kerf est un sous-espace vectoriel de **E**, considérons donc une base $S = \{e_1 , \dots , e_r\}$ de kerf . Complétons S par n-r vecteurs, de façon à obtenir une base de **E** :
$\mathbf{B} = \{e_1 ; e_2 ; \dots ; e_r ; e_{r+1} ; \dots ; e_n\}$.
f(**E**) est engendrée par f(**B**) donc rang(f) = rangf(**B**).
Or $f(e_1) = f(e_2) = \dots = f(e_r) = \mathbf{O}_F$, donc rangf(**B**) = $\mathrm{rang}\{f(e_{r+1}), f(e_{r+2}), \dots, f(e_n)\}$.
Pour montrer le théorème, il suffit donc de montrer que le système
$\{f(e_{r+1}) , \dots , f(e_n)\}$ est libre. Supposons que $\sum_{i=r+1}^{n} \lambda_i f(e_i) = \mathbf{0}_F$, alors
$f(\sum_{i=r+1}^{n} \lambda_i e_i) = \mathbf{0}_F$ et $(\sum_{i=r+1}^{n} \lambda_i e_i) \in$ kerf . On peut donc écrire : $\sum_{i=r+1}^{n} \lambda_i e_i = \sum_{i=1}^{i=r} x_i e_i$
soit $\sum_{i=r+1}^{n} \lambda_i e_i - \sum_{i=1}^{r} x_i e_i = \mathbf{0}_E$.
Or **B** est une base de **E** , les coordonnées de $\mathbf{0}_E$ étant nuls, $\lambda_i = 0$ pour i = 1,…, r et $x_i = 0$ pour i = r+1, …, n.

3. Représentation matricielle d'une application linéaire

Soit $\mathbf{B} = \{e_1, e_2 , \dots , e_n\}$ une base de **E** et $\mathbf{B}' = \{f_1 , f_2 , \dots , f_p\}$ une base de **F**.
Considérons une application linéaire de **E** dans **F**. f est déterminée par les images des éléments de **B** par f. Chaque vecteur $f(e_i)$ est représenté par le vecteur colonne de ses coordonnées dans **B'**.

On appelle **matrice** de f dans les bases **B** et **B'**, et on notera **m(f)**, le tableau de nombres formé par les vecteurs colonnes des coordonnées des $f(e_i)$ dans **B'**.
$m(f) = (f(e_1)\ f(e_2) \dots f(e_n))$

Ce tableau comporte donc p lignes et n colonnes. On dit que m(f) est une matrice de **format** (p,n). Si n=p la matrice est dite **carrée d'ordre n**.

m(f) dépend bien sûr de f mais aussi des bases choisies dans **E** et **F**.

Aussi lorsque ces bases ne sont pas évidentes, il est indispensable de les préciser lorsque l'on donne la matrice d'une application linéaire.

Le rang de f est le rang des $f(e_i)$, système générateur de f(**E**). C'est donc le rang des vecteurs colonnes de m(f). On montre que c'est aussi le rang des vecteurs lignes de m(f). On dira que c'est aussi le rang de m(f).

rangm(f) = rang(f) = rang des vecteurs colonnes de m(f) = rang des vecteurs lignes de m(f)

Donc rangm(f) $\leq$ inf(n,p) (le rang de m(f) est inférieur ou égal à la plus petite de ses dimensions).

Si n=p et si rangm(f) = n, on dit que m(f) est **régulière d'ordre n.**

Exercices

Exercice 1

Soit f : $IR^3 \to IR^3$ telle que $(x, y, z) \to (x + y + z, x + y + z, x + y + z)$

1) Montrer que f est linéaire.
2) Déterminer Kerf et Imf.
3) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $f^n = f \circ f \circ f \circ \dots \circ f$.

Exercice 2

Soit f l'application linéaire de IR^3 dans IR^4 définie par :
$f(x, y, z) = (x + y, 2x + z, x – z, x + y + z)$.
Cette application est-elle surjective? Injective?

Exercice 3

Soit f une application linéaire : $IR^4 \to IR^3$ telle que: $f(1, 0, 1, 0) = (2, 4, -1)$
$f(0, 1, 0, 0) = (0, 1, 2)$, $f(0, 0, 1, 1) = (0, 0, -3)$, $f(0, 0, 0, 1) = (2, 2, 0)$.

1) Montrer que ces relations définissent bien f.
2) f est-elle injective ? surjective ? Déterminer le noyau de f.
3) Donner l'image par f d'un vecteur (x, y, z, t) de IR^4.

Exercice 4

Soit f une application linéaire de E dans F et g une application linéaire de F dans G. Montrer que $g \circ f$ est une application linéaire de E dans G.

Exercice 5

Soit f une application linéaire de E dans F définie par :
$f(e_1) = V_1$, $f(e_2) = V_2$ et $f(e_3) = 2V_1 - V_2$ où $B = \{e_1 , e_2 , e_3\}$ est une base de E et où V_1 et V_2 sont linéairement indépendants dans F.
1) Quel est le rang de f ?
2) f est-elle injective ? Déterminer son noyau.
3) Déterminer l'image par f d'un vecteur quelconque de E, en fonction de V_1 et V_2 et de ses coordonnées dans B.

Exercice 6

Soit f : $IR^2 \to IR^2$ telle que : $f(1, 3) = (2, 1)$, $f(0, 2) = (4, 2)$ et $f(1, 1) = (a, b)$.
A quelles conditions sur a et b ces relations définissent-elles une application linéaire? Déterminer alors son noyau et son rang. Quelle est l'image de (x, y) par f ?

Exercice 7

Soit V le sous espace vectoriel de IR^3 engendré par (1, 1, 0) et (1, 0, 1).
Déterminer une application linéaire de IR^3 dans IR^2 dont le noyau est V.

Exercice 8

Montrer que les applications linéaires suivantes sont des bijections de IR^3:

f telle que $f(x, y, z) = (x, y - z, x + z)$ et g telle que $g(x, y, z) = (x + y, -z, y)$.
Déterminer $fog(x, y, z)$.

Exercice 9

Soit $u : (x, y, z) \to (y + z, 2y, 3y)$.

1) Montrer que u est linéaire.
2) Déterminer Imu, $Im(u^2)$, $Im(u^3)$, …Imu^n, ($u^2 = u \circ u$, $u^3 = u \circ u \circ u$ ….)

Exercice 10

Déterminer l'application linéaire f de IR^3 dans IR telle que $f(1, 0, 1) = 1$,
$f(0, 1, 1) = 0$ et $f(1, 2, 0) = 2$ et déterminer Kerf.

Exercice 11

Soit $X_1 = (1, 2, 0)$, $X_2 = (1, 3, 0)$ et $X_3 = (0, 0, 1)$ et f une application linéaire de IR^3 dans IR^3 telle que $f(X_1) = (1, 0, -1)$, $f(X_2) = (1,-1, 2)$ et $f(X_3) = (2, -1, 3)$.

1) Déterminer une base de $f(IR^3)$ et le rang de f.
2) Déterminer le noyau de f et calculer $f(x, y, z)$.

Exercice 12

Déterminer les matrices des applications linéaires des exercices 1, 2 et 6 dans les bases canoniques des espaces vectoriels qui interviennent.

Exercice 13

Soit f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y, z) = (2x - 3y, x + y)$.

1) Déterminer la matrice de f dans les bases canoniques de IR^3 et de IR^2.
2) Trouver la matrice de f dans les bases B et B' telles que :
B = {(1, 1, 0) ; (0,-1, 0) ; (0,-1, 1)} et B' = {1, 1) ; (0, -1)}

Exercice 14

Soit f de IR^4 dans IR^3 définie par $f(x, y, z, t) = (x - y, 2y + t, -z)$.
Donner la matrice de f en utilisant les bases suivantes :
B =(1,0,-1,0) , (0,1,1,1) , (1,0,0,-1) , (0,1,1,0)} et
B' = {(1, 1, 1), (1, -1, 1), (1, 1, -1)}.

Exercice 15

Soit f dont la matrice est $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ dans les bases B = {(1, 1, 0); (0, -1, 0); (0, -1, 1)} et
B' = {(1, 1); (0, -1)}, déterminer la matrice de f dans les bases canonique de IR^3 et IR^2.

Exercice 16

Soit f telle que $f(x, y) = (x + 2y, x)$. Déterminer deux vecteurs V_1 et V_2 non colinéaires et tels que $f(V_1)$ et $f(V_2)$ soient colinéaires respectivement à V_1 et V_2. Quelle est alors la matrice de f dans la base $\{V_1, V_2\}$?

Exercice 17

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & 3 \\ -1 & 5 & -1 \end{pmatrix}$ la matrice d'une application linéaire f dans la base canonique de IR^3.

Déterminer le rang et le noyau de f.

Soit $V_1 = (1, 1, 1)$, $V_2 = (0, 1, -1)$ et $V_3 = (1, 0, -1)$. Calculer $f(V_1)$, $f(V_2)$ et $f(V_3)$. On note $f(S) = \{f(V_1), f(V_2), f(V_3)\}$. Quel est le rang de f(S)?

Donner la matrice de f dans $\{V_1, V_2, V_3\}$.

Exercice 18

Soit f de IR^3 dans IR^2, définie par : $f(x, y, z) = (2x – y, x + 3z)$.

1) Déterminer la matrice de f dans les bases canoniques de IR^3 et IR^2.

Quels sont le rang et le noyau de f.

2) Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ la matrice de l'application g dans la base

$B = \{v_1=(1,2), v_2= (0,-1)\}$ de IR^2 et la base canonique de IR^3.

Donner la matrice de g dans les bases canoniques de IR^2 et IR^3.

Exercice 19

Soit $V_1 = (-1, 1, 0)$, $V_2 = (1, 0, 2)$ et $F = < V_1, V_2 >$.

1) A quelle condition sur x, y et z, V = (x, y, z) appartient-il à F ?

2) Soit $V_3 = (1, 1,-1)$, $V_4 = (1, 1, 2)$ et $V_5 = (0, 1,2)$. Déterminer les rangs des systèmes suivants : $\{ V_1, V_2 , V_3 \}$, $\{V_1 , V_2 , V_4 \}$, $\{ V_1 , V_2 , V_5 \}$ et $\{ V_1, V_2 , V_3 , V_4 \}$.

3) Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ telle que :

$f(1, 0, 0) = V_1$ $f(0, 1, 0) = V_2$ $f(0, 0, 1) = V_5$.

Déterminer f(x, y, z), le rang de f, un système générateur de Imf et le noyau de f.