Leçon 09 – Exercices

Les exercices avec une * sont intéressants mais plus difficiles et peuvent être sautés.

Exercice 1 -Soit X_1, X_2 et X_3 , trois vecteurs de $\mathbf{IR}^3$ tels que :
$X_1 = (-1,5,2)$, $X_2 = (2,-1,2)$ et $X_3 = (1,1,3)$
1) Calculer les combinaisons linéaires suivantes : $3X_1 - 2X_2 + X_3$; $3(X_1-X_3) +X_2$
2) Trouver trois réels α , β et γ non nuls, tels que $\alpha X_1 + \beta X_2 + \gamma X_3$ ait ses deux premières composantes nulles .

Exercice 2-Les ensembles suivants sont-ils des sous espaces vectoriels de $\mathbf{IR}^3$?
$A = \{(x,y,z)\in \mathbf{IR}^3 ; 3x -5y + z = 0 \}$; $B = \{(x,y,z)\in \mathbf{IR}^3 ; 2x - 3y + 5z = 1 \}$
$C = \{(x,y,z)\in \mathbf{IR}^3 ; 2x + 3y + z \geq 0 \}$; $D = \{(x,y,z)\in \mathbf{IR}^3 ; xyz = 0 \}$
$E = \{(x,y,z)\in \mathbf{IR}^3 ; (x,y,z) = (x+y+z)(2,3,1) + (x-y)(5,-1,2) \}$

Exercice 3*-Montrer que l'ensemble **E** des fonctions f de la variable x définies sur [0,1] et vérifiant $f(1) = 2f(0)$ peut être muni d'une structure d'espace vectoriel.
En est-il de même pour l'ensemble **F** des fonctions g définies sur [0,1] et vérifiant $g(1) = g(0) + 1$?

Exercice 4-Les ensembles suivants sont-ils des sous espaces vectoriels de $\mathbf{R}^4$?
$F = \{(x,y,z,t)\in \mathbf{R}^4 ; z = 0\}$; $G = \{(x,y,z,t)\in \mathbf{R}^4 ; y \leq 0 \}$;
$H = \{(x,y,z,t)\in \mathbf{R}^4 ; y = z+t\}$; $I = \{(x,y,z,t)\in \mathbf{R}^4 ; xy = 0\}$;
$J = \{(x,y,z,t)\in \mathbf{R}^4 ; y\in \mathbf{Q} \}$; $K = \{(x,y,z,t)\in \mathbf{R}^4 ; z = x^2 \}$

Exercice 5-Les vecteurs suivants engendrent-ils $\mathbf{R}^3$:
1) (2,-1,4) , (3,1,2) et (0,2,-1).
2) (4,-1,0) , (1,1,1) et (-7,3,1).
3) (1,1,2) , (-3,2,1) , (0,5,7) et (0,1,-1).

Exercice 6-Montrer que dans ces différents cas X_1 , X_2 et X_3 sont dépendants et trouver une relation entre X_1, X_2 et X_3 .
1) $X1 = (1,-1,0)$, $X_2 = (2,4,2)$ et $X_3 = (2,7,3)$
2) $X1= (2,3,-1)$, $X_2 = (0,-1,3)$ et $X_3 = (-3,-4,0)$
3) $X1 = (8,2,1)$, $X_2 = (-1,3,5)$ et $X_3 = (10,22,32)$

Exercice 7-Déterminer si les familles suivantes sont libres ou liées et donner leur rang
1) {(2,1) , (-3,2) , (4,3) , (1,1)}
2) {(4,1) , (2,3)}
3) {(3,-1,2) , (4,1,1) , (0,-2,1)}
4) {(0,3,2,-1) , (3,-2,1,1) , (1,1,1,1) , (4,-3,1,-2)}

Exercice 8-Déterminer le rang des systèmes suivants :
1) {(0,1) , (1,-2) , (4,3) }

2) $\{(3,1,2)$, $(4,2,0)$, $(1,3,-2)\}$
3) $\{(0,1,0,2)$, $(1,1,-1,0)$, $(2,0,1,1)\}$
4) $\{(1,-1,0)$, $(2,0,1)$, $(2,6,4)\}$

Exercice 9-L'ensemble $S = \{(2,1,1)$, $(0,3,5)$, $(2,4,6)$, $(1,6,6)\}$ forme-t-il une base de $\mathbf{R}^3$? Extraire une base de $\mathbf{R}^3$? Combien de bases de $\mathbf{R}^3$ peut-on extraire de S ?

Exercice 10-On considère des ensembles $\mathbf{E} = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \ ; \ y = 2x\}$ et $\mathbf{F} = \{(x,x) \in \mathbf{R}^2\}$. Montrer que **E** et **F** sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^2$ et déterminer $\mathbf{E} \cap \mathbf{F}$.

Exercice 11-On considère les ensembles suivants :

$\mathbf{E} = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \ ; \ x = y = z\}$; $\mathbf{F} = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \ / \ x-2y+z = 0\}$ et

$\mathbf{G} = \{(a-b, a+b, 2a-3b) \ ; \ a \in \mathbf{R} \text{ et } b \in \mathbf{R}\}$.

1) Montrer que **E**, **F** et **G** sont des sous espaces vectoriels de $\mathbf{R}^3$.
2) Déterminer les sous espaces vectoriels $\mathbf{E} \cap \mathbf{F}$, $\mathbf{E} \cap \mathbf{G}$ et $\mathbf{F} \cap \mathbf{G}$.

Exercice 12-Donner une base et la dimension du sous espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$ défini par:
$\{(x,y,z,t) \in \mathbf{R}^4 \ ; \ x - y + z + t = 0\}$
En déduire le rang du système suivant :
$\{(0,1,2,-1)$, $(1,0,-2,1)$, $(3,2,0,-1)$, $(1,1,-1,1)\}$

Exercice 13-Donner une base et la dimension du sous espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$ défini par:
$\{(x,y,z,t) \in \mathbf{R}^4 \ ; \ x + y - z = 0 \text{ et } x - y + 2t = 0\}$

Exercice 14-Soient trois vecteurs linéairement indépendants e_1, e_2 et e_3 d'un espace vectoriel **V**.
Que peut-on dire de dim**V** ?

Exercice 15-Donner une base et la dimension du sous espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$ défini par:
$\{(\lambda-\mu \ , \ \lambda+\mu \ , \ 2\lambda-\mu) \ ; \ \lambda \in \mathbf{R} \text{ et } \mu \in \mathbf{R}\}$

Exercice 16-1) Montrer que l'ensemble $\mathbf{E} = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \ ; \ x-2y+z = 0\}$ est un sous espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$.
2) Soit **F** le sous espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$ engendré par les vecteurs $(1,1,1)$ et $(3,1,-1)$. Vérifier que $\mathbf{F} \subseteq \mathbf{E}$. A-t-on $\mathbf{E} = \mathbf{F}$?

Exercice 17-1) Montrer que l'ensemble $\mathbf{E} = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \ ; \ 2x-y+2z = 0\}$ est un sous espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$. Déterminer une base et la dimension de **E**.
2) Soit **F** le sous espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$ engendré par les vecteurs $u = (1,2,0)$ et $v = (2,1,1)$, déterminer que $\mathbf{E} \cap \mathbf{F}$.

Exercice 18-Montrer que, dans les différents cas suivants, le système $\{e_1, e_2, e_3\}$ est une base de $\mathbf{R}^3$. Exprimer les coordonnées de $(-1,2,3)$ puis celle de (x,y,z) dans cette base .
1) $e_1 = (-1,0,1)$; $e_2 = (1,-1,0)$; $e_3 = (1,1,1)$
2) $e_1 = (1,2,0)$; $e_2 = (0,1,1)$; $e_3 = (1,0,2)$
3) $e_1 = (1,0,2)$; $e_2 = (1,1,2)$; $e_3 = (0,1,1)$

Exercice 19-Démontrer que dans l'espace vectoriel $\mathbf{R}^3$, les vecteurs $u = (2,3,-1)$ et $v = (1,-1,-2)$ d'une part, et les vecteurs $u' = (3,7,0)$ et $v' = (5,0,-7)$ d'autre part, engendrent le même sous espace vectoriel.

Exercice 20-Montrer que les ensembles suivants sont des sous espaces vectoriels de $\mathbf{R}^4$ dont on déterminera la dimension et une base :

$A = \{(\lambda+\mu , 2\lambda , \lambda-2\mu , \mu) ; \lambda\in \mathbf{R} , \mu\in \mathbf{R}\}$

$B = \{(x,y,z,t)\in \mathbf{R}^4 ; \; x-z = y-t \}$

Exercice 21- Soit $S_1= \{ u_1=(a,1,1) , u_2=(-1,-a,-1) , u_3=(1,1,a) \}$

et $S_2 = \{v_1=(a,1,1) , v_2=(-1,-a,-1) , v_3=(-1,-1,a) \}$

Déterminer suivant les valeurs de a le rang de S_1 ainsi que celui de S_2.

Exercice 22-Soit $v_1 = (4,0,-2)$, $v_2 = (-8,1,5)$ et $v_3 = (2,0,0)$. Ces vecteurs sont-ils indépendants?

On considère le sous espace vectoriel **V** engendré par v_1 et v_2. Quelle est sa dimension ? Donner une base de **V**. v_3 appartient-il à **V**? $v_4 = (-4,2,4)$ appartient-il à **V**? A quelle condition sur a, b et c un vecteur $w = (a,b,c)$ appartient-il à **V**?

Exercice 23- 1) Soit $V_1 = (-1,1,0)$, $V_2 = (1,0,2)$ et **F**, le sous espace vectoriel engendré par V_1 et V_2.

a) A quelle condition sur x, y et z, $V = (x,y,z)$ appartient-il à **F** ?

b) Soit $V_3 = (1,1,-1)$, $V_4 = (1,1,2)$ et $V_5 = (0,1,2)$. Déterminer les rangs des systèmes suivants :

$\{ V_1 , V_2 , V_3 \}$, $\{ V_1 , V_2 , V_4 \}$, $\{ V_1 , V_2 , V_5 \}$ et $\{ V_1 , V_2 , V_3 , V_4 \}$.

2)* On se place dans un espace vectoriel de dimension $n \geq 2$. Dire si la proposition suivante est vraie :

$$(S = \{ e_1 , e_2 , e_3 \} \text{ lié }) \Rightarrow (e_3\in < e_1 , e_2 >).$$

Si la réponse est affirmative, la prouver. Si la réponse est négative, donner un contre-exemple.