Leçon 09 – Correction des "Exercez-vous"

Exercez vous 9
Soit le système : {(1, 2, -1) ; (3, -1, 2) ; (-1, 5, -4)}. Ces vecteurs de $\mathbf{IR}^3$ sont-ils liés? Quel est le rang de ce système?

Solution

Posons $X_1 = (1, 2,-1)$, $X_2 = (3,-1,2)$ et $X_3 = (-1,5,-4)$.
Supposons donc qu'il existe 3 réels λ_1, λ_2 et λ_3 tels que : $\lambda_1X_1 + \lambda_2X_2 + \lambda_3X_3 = \mathbf{0}$

Soit $\lambda_1(1,2,-1) + \lambda_2(3,-1,2) + \lambda_3(-1,5,-4) = (0,0,0)$

Soit $\begin{cases} \lambda_1 + 3\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 - \lambda_2 + 5\lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 + 2\lambda_2 - 4\lambda_3 = 0 \end{cases}$ en utilisant la méthode de Gauss, on obtient :

$\begin{cases} \lambda_1 + 3\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ \frac{7}{2}\lambda_2 - \frac{7}{2}\lambda_3 = 0 \\ 5\lambda_2 - 5\lambda_3 = 0 \end{cases}$ Soit $\begin{cases} \lambda_1 + 3\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \end{cases}$

Les vecteurs sont donc liés puisque $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 1$ et $\lambda_3 = 1$ conviennent par exemple et $-2X_1 + X_2 + X_3 = \mathbf{0}$.
Le rang du système est donc inférieur ou égal à 2.
Si nous considérons les deux premiers vecteurs X_1 et X_2 ; dire qu'ils sont liés c'est dire qu'il existe deux réels α et β tels que $\alpha X_1 + \beta X_2 = \mathbf{0}$. Cela revient à dire que X_1 et X_2 sont proportionnels. Or ce n'est pas le cas. Ils sont donc indépendants et le rang du système est 2.