Leçon 09 – Correction des "Exercez-vous"

Exercez-vous 3
Montrer que l'ensemble **F** des fonctions de **IR** dans **IR** peut être muni d'une structure d'espace vectoriel sur **IR**.

Solution

Considérons l'ensemble **F** des fonctions de **IR** dans **IR** muni de l'addition comme loi interne et la multiplication comme loi externe.
On remarque que la fonction nulle est un élément de **F** c'est la fonction qui à tout x on lui associe 0
Pour toute f fonction de **IR** dans **IR** on a :
$f(x)+0=0+f(x)=f(x)$ pour tout réel x d'où
$f+0=0+f=f$
La fonction nulle est l'élément neutre de **F**

Soit f et g deux fonctions de **IR** dans **IR** on a
$f(x)+g(x)=g(x)+f(x)$ pour tout réel x d'où
$f+g=g+f$ donc la loi est commutative

Soit f, g et h trois fonctions de **IR** dans **IR** on a :
$f(x)+(g(x)+h(x))=(f(x)+g(x))+h(x)=f(x)+g(x)+h(x)$ pour tout réel x d'où :
$f+(g+h)=(f+g)+h=f+g+h$ la loi est associative

Si f est une fonction de **IR** dans **IR** (-f) est aussi une fonction de **IR** dans **IR** et on a :

$f(x)+(-f(x))=(-f(x))+f(x)=0$ donc tout élément de **F** admet un opposé

On peut aussi définir sur **F** une **loi de composition externe**, produit par un réel,
Pour tous réels λ et μ, pour toute fonction de **F**
$(\lambda + \mu).f(x) = \lambda.f(x) + \mu.f(x)$ pour tout réel x d'où
$(\lambda + \mu).f = \lambda.f + \mu.f$
Pour toutes fonctions f et g de **F**, pour tout réel λ :
$\lambda.(f(x) + g(x)) = \lambda.f(x) + \lambda.g(x)$ pour tout réel x d'où :
$\lambda.(f + g) = \lambda.f + \lambda.g$
Pour tous réels λ et μ, pour toute fonction de **F**:
$\lambda.(\mu.f(x)) = (\lambda\mu).f(x)$ pour tout réel x d'où :
$\lambda.(\mu.f) = (\lambda\mu).f$
Pour toute fonction de **F**, la fonction qui à tous réels x on lui associé 1 c'est-à-dire la fonction constante égal à 1 est élément de **F** qu'on note par $j(x)=1$ pour tout réel x :
$j(x).f(x)=f(x).j(x)=1.f(x)$ d'où $j.f=f$
D'où (**F** , +, .) est un espace vectoriel.