Leçon 09 – Correction des "Exercez-vous"

Exercez vous 12

Soit A = $\{(a + b, a , b - a)$ avec $a\in$ **IR** et $b\in$ **IR**$\}$.

1) Montrer que A est un sous espaces vectoriels de $\mathbf{IR}^3$.

2) Trouver un système générateur de A, puis une base de A et sa dimension.

Solution

(1) A est non vide : $(0, 0, 0)\in A$. Si $X = (a+b, a, b-a)$ et si $X' = (a'+b', a' , b'-a')$ et si λ et μ sont deux réels,

(2) $\lambda X + \mu X' = (\lambda(a+b) + \mu(a'+b') , \lambda a + \mu a' , \lambda(b-a) + \mu(b'-a'))$

$= ((\lambda a +\mu a') + (\lambda b+\mu b'), \lambda a + \mu a', (\lambda b+\mu b') - (\lambda a +\mu a'))$

Donc $\lambda X + \mu X'\in A$ et A est un sous espace vectoriel de $\mathbf{IR}^3$.

2) $X\in A$ si et seulement si $X = (a+b, a , b-a) = a (1, 1, -1) + b (1 , 0 , 1)$. A est donc engendré par (1, 1, 1) et par (1, 0, 1) et A est de dimension 2 puisque ces deux derniers vecteurs sont indépendants et forment donc une base de A.