Leçon 09 – Correction des "Exercez-vous"

Exercez vous 11
Soit **B** = {(1, 0, 0) ; (0, 1, 0) ; (0, 0, 1)} la base canonique de $\mathbf{IR}^3$.
Soit **B**' = {(1, 1, 0) ; (0, 1, 0) ; (1, 1, 1)}.
Montrer que **B**' est une base de $\mathbf{IR}^3$ et si X = (x, y, z) est un élément quelconque de $\mathbf{IR}^3$, donner ses coordonnées dans **B** puis dans **B**'.

Solution

Pour montrer que **B**' est une base, il faut montrer que la décomposition d'un vecteur X = (x, y, z) dans cette base existe et est unique.
Cherchons donc α, β et γ tels que $X = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3$ avec $e_1 = (1, 1, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ et $e_3 = (1, 1, 1)$ cela revient à résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x = \alpha + \gamma \\ y = \alpha + \beta + \gamma \\ z = \gamma \end{cases}$$

On obtient donc $\gamma = z$; $\alpha = x-z$ et $\beta = y-x$ et la solution existe bien et est unique. **B**' est donc une base de $\mathbf{R}^3$.
D'autre part X = (x,y,z) = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1) ses coordonnées dans **B** sont donc données par le vecteur colonne : $\begin{pmatrix} x,y,z \end{pmatrix}$
De plus $X = (x, y, z) = (x-z)e_1 + (y-x)e_2 + ze_3$. Donc les cordonnées de X dans la base **B**' sont données par $\begin{pmatrix} x-z,y-x,z \end{pmatrix}$.