Leçon 09 – Cours : Espaces Vectoriels

Objectif: Cette leçon est la première d'une série de deux. Elle aborde l'algèbre linéaire, outil très utile pour les Statistiques et pour la résolution de nombreux problèmes mathématiques qui peuvent s'écrire sous forme matricielle. La notion de matrice sera introduite dans la leçon 10 et sera développée en L2.

L'objectif de cette leçon est d'acquérir les différentes notions liées aux espaces vectoriels et à leurs éléments qui sont des vecteurs. On se placera dans le cadre de IR^n.

1. Cas d'application

Voici une situation concrète où les notions théoriques que nous introduisons dans les paragraphes suivants interviennent.

Considérons une banque qui propose à ses clients un portefeuille en plusieurs monnaies permettant par exemple l'achat d'actions étrangères sans frais de change.

Chaque portefeuille contient une valeurs de x euros, y dollars, z yens et t francs suisses. On notera un tel portefeuille par (x,y,z,t).
Ainsi (500 , 800 , 3 000 , 1 000) désigne un portefeuille (noté A plus loin) de 500 euros, 800 dollars, 3 000 yens et 1 000 francs suisses.

On doit pouvoir faire la somme de deux portefeuilles (x_1 , y_1 , z_1 , t_1) et (x_2 , y_2 , z_2 , t_2). On ne peut bien-sûr qu'ajouter les valeurs d'une même monnaie et naturellement, on posera :

$$(x_1 , y_1 , z_1 , t_1) + (x_2, y_2 , z_2 , t_2) = (x_1 + x_2 , y_1 + y_2 , z_1 + z_2 , t_1 + t_2).$$

Si on considère un portefeuille B, (50 , 10 , 200, 100), la **somme** des deux portefeuilles A et B est donc (550 , 810 , 3 200 , 1 100), soit de 550 euros, 810 dollars, 3 200 yens et 1 100 francs suisses.

D'autre part, chaque année, chaque portefeuille est soumis à une taxe de 0.2% (frais de garde). On définira alors l'opération **produit** suivante

$$0.002\,(x,y,z,t) = (0.002x , 0.002y , 0.002z , 0.002t).$$

Donc les taxes relatives au portefeuille A seront (1, 1.6 , 6 , 2), c'est à dire 1 euros, 1.6 dollars, 6 yens et 2 francs suisses.

Sur cet ensemble de portefeuilles (que nous noterons $\wp$), on a ainsi défini deux opérations (somme de deux portefeuilles et produit d'un portefeuille par un nombre réel).

Dans la suite de ce cours, nous allons généraliser cette situation, attribuer des propriétés naturelles aux opérations et munir ainsi les ensembles sur lesquels elles sont définies (ici $\wp$) d'une structure algébrique simple (d'**espace vectoriel**) permettant des « manipulations » intéressantes. Les portefeuilles seront appelés **vecteurs**.

2. Définitions - Exemples

2.1. L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$

Les éléments de $\mathbf{R}^n$ sont des suites finies de n termes réels : $X = (x_1,x_2,\ldots,x_n)$ ($x_1 \in \mathbb{R}$, $x_2 \in \mathbb{R}$ … ,$x_n \in \mathbb{R}$).

On peut définir sur $\mathbb{R}^n$ une **loi de composition interne**, l'addition, notée + par : pour tous X et Y de $\mathbb{R}^n$

$$X + Y = (x_1,x_2,\ldots,x_n) + (y_1,y_2,\ldots,y_n) = (x_1 + y_1,x_2 + y_2,\ldots,x_n + y_n)$$

Propriétés de l'addition dans $\mathbb{R}^n$

*Elle est associative : (pour tout X,Y,Z)

$X + (Y + Z) = (X + Y) + Z = X + Y + Z$

*Elle est commutative : pour tous X et Y,

$X + Y = Y + X$.

*Elle a un élément neutre $\mathbf{0} = (0,0,\ldots,0)$: pour tout X,

$X + \mathbf{0} = \mathbf{0} + X = X$.

*Tout élément X a un opposé noté $-X =(-x_1,-x_2,\ldots,-x_n)$:

$X + (-X)=(-X) + X = \mathbf{0}$.

On peut aussi définir sur $\mathbb{R}^n$ une **loi de composition externe**, produit par un réel, noté . ou parfois sans signe, par :
pour tout réel λ et pour X de $\mathbb{R}^n$ $\lambda.X=\lambda X = \lambda(x_1,x_2,\ldots x_n) = (\lambda x_1,\lambda x_2,\ldots,\lambda x_n)$.

Propriétés du produit par un réel :

*Pour tous réels λ et μ, pour tout élément X de $\mathbb{R}^n$: $(\lambda + \mu).X = \lambda.X + \mu.X$
*Pour tous éléments X et Y de $\mathbb{R}^n$, pour tout réel λ :
$$\lambda.(X + Y) = \lambda.X + \lambda.Y$$
*Pour tous réels λ et μ, pour tout élément X de $\mathbb{R}^n$: $\lambda.(\mu.X) = (\lambda\mu).X$
*Pour tout élément X de $\mathbb{R}^n$: $1.X = X$.

L'ensemble $\mathbb{R}^n$, muni de ces deux lois est un **espace vectoriel** sur $\mathbb{R}$. On note parfois $(\mathbb{R}^n,+,.)$

Un ensemble **V**, muni d'une loi de composition interne (qui a deux éléments de **V** fait correspondre un élément de **V**) et d'une loi de composition externe (qui à un élément de **IR** et à un élément de **V** fait correspondre un élément de **V**) ayant les huit propriétés énoncées précédemment est appelé **espace vectoriel sur IR**. Ses éléments sont appelés **vecteurs**.

Remarque : On peut aussi définir des espaces vectoriels sur des ensembles **K**, qui ont la même structure algébrique que **R**, appelée corps (par exemple **Q** ou **C**). Mais nous utiliserons essentiellement des espaces vectoriels réels dans ce cours.

3. Combinaisons linéaires – Sous-espaces vectoriels

Soit **V** un espace vectoriel sur **IR**.

On appelle **combinaison linéaire** de p vecteurs $X_1, X_2 \ldots X_p$ de **V**, un vecteur de la forme $\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \ldots + \lambda_p X_p = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i X_i$ avec $\lambda_i \in$ **IR** (i=1,2,…,p).

Définition : Si **V** est un espace vectoriel sur un corps **IR**, on appelle **sous-espace vectoriel** de **V**, toute partie de **V** qui est elle-même un espace vectoriel sur **IR**.

Une partie **W** de **V** sera donc un sous espace vectoriel de **V**, si elle est **stable** par rapport aux deux lois. C'est à dire si la somme de deux éléments de **W** est encore un élément de **W** et si le produit d'un élément de **W** par réel reste dans **W**. En effet les propriétés qui sont valables dans **V** le resteront alors dans **W**.

Propriété : **W** est un sous espace vectoriel de **V** si et seulement si :
*__W__ est non vide,
*pour tous X et Y de **W**, $X + Y \in$ **W**,
*pour tout X de **W** et pour tout réel λ : $\lambda.X \in$ **W**.

Cette propriété peut être remplacée par : **W** est non vide et pour tous X et Y de **W** et pour tous réels λ et μ : $\lambda.X + \mu.Y \in$ **W**.

Remarque : Pour que **W** soit un sous-espace vectoriel de **V**, il est **nécessaire** que **W** contienne **0** (élément neutre de **V**). Si on donne la valeur 0 à λ dans la deuxième condition, on retrouve ce résultat.

Propriété : L'intersection de deux sous-espaces vectoriels de **V** est un sous-espace vectoriel de **V**.

Démonstration :

Soient E et F deux sous-espaces vectoriel de V, on note $E\cap F$ leur intersection $\varnothing$ l'ensemble vide.
On a alors
i): $E\cap F \neq \varnothing$ car $0\in E\cap F$ étant donné que E et F sont des sous-espaces vectoriels de V et contiennent 0 .

ii) pour tous X et Y éléments de $E\cap F$
$X+Y \in E$ car X et Y sont des éléments de E qui est un sous-espace vectoriel de V.
De même , puisque X et Y appartiennent au sous-espace vectoriel F, $X+Y\in F$. On a donc :
$X+Y \in E$ et $X+Y \in E$ Falors $X+Y \in E\cap F$.

iii) pour tout $X\in E\cap F$ et $\lambda\in$ **IR**
$X \in E\cap F$, donc $X\in E$ et comme E est un sous-espace vectoriel alors : $\lambda X\in E$
$X \in E\cap F$, donc $X\in E$ et comme E est un sous-espace vectoriel alors : $\lambda X\in E$
D'où finalement : $\lambda X\in E\cap F$.
L'intersection de deux sous-espaces vectoriels est donc bien un sous-espace vectoriel de V.

• **Attention**, on montre par contre que la réunion de deux sous-espaces vectoriels n'est pas un sous-espace vectoriel.

Notation : On note $< X_1,\dots, X_p >$ ou vect $(X_1 , \dots , X_p)$ l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires des vecteurs $X_1, \dots X_p$ de **V**.

Propriété : $< X_1,\dots, X_p >$ est un sous-espace vectoriel de **V**.

Démonstration :

Soit $X\in F$, $Y\in F$, $\lambda\in$ **IR** et $\mu\in$ **IR**.
Donc $X = \sum_{i=1}^{p} x_iX_i$ et $Y = \sum_{i=1}^{p} y_iX_i$ et $\lambda X + \mu Y = \lambda \sum_{i=1}^{p} x_iX_i + \mu \sum_{i=1}^{p} y_iX_i = \sum_{i=1}^{p} (\lambda x_i + \mu y_i) X_i$.
Et $\lambda X + \mu Y\in F$. F est donc bien un sous-espace vectoriel de **V**.

4. Systèmes générateurs – libres – liés – bases

4.1. Rappel : méthode de Gauss

La méthode de Gauss permet de résoudre des systèmes de n équations à n inconnues.

Utilisons-la sur un exemple où n=3
Soit résoudre le système (S) :

$$(S)\begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \ (1) \\ 2x - y - z = 0 \ (2) \\ x + y - z = -4 \ (3) \end{cases} \quad \left(\begin{array}{c} \text{On remplace (2) par (-2)(1)+(2)} \\ \text{pour annuler le coefficient de x dans (2)} \\ \text{on remplace (3) par -(1) + (3)} \\ \text{pour annuler le coefficient de x dans (3)} \\ \text{d'où } (S_1) \end{array} \right)$$

$$(S_1)\begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \ (1) \\ 3y - 7z = -2 \ (2) \\ 3y - 4z = -5 \ (3) \end{cases} \quad \left(\begin{array}{c} \text{On remplace (3) par -(2) + (3)} \\ \text{pour annuler le coefficient de y dans (3)} \\ \text{d'où } (S_2) \end{array} \right)$$

$$(S_2)\begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \ (1) \\ 3y -7z = -2 \ (2) \\ 3z = -3 \ (3) \end{cases} \quad \left(\begin{array}{c} \text{On obtient alors} \\ \text{une résolution en cascade} \\ \text{(3) donne z = -1} \\ \text{(2) donne alors y = -3} \\ \text{et (1) donne enfin x = -2} \end{array} \right)$$

Remarques : *Il est parfois intéressant de changer l'ordre des équations au départ pour simplifier les calculs. On a intérêt à ce que le coefficient de x soit le plus simple possible dans la première équation.

*Cette méthode se généralise de façon naturelle à 4, 5 … , n équations linéaires à 4 , 5 … , n inconnues. Cette méthode permet de remplacer le système de départ par un système triangulaire équivalent et simple à résoudre.

4.2 Systèmes générateurs

Soit **V**, un espace vectoriel sur **IR**.

Définition : Soit X_1 , X_2 , … , X_p , p vecteurs d'un espace vectoriel **V**. On dit que ces vecteurs forment un **système générateur** de **V** si et seulement si tout vecteur X de **V** peut s'écrire sous la forme d'une combinaison linéaire des X_i (i=1,2…p).

$$(S=\{X_1 , X_2 , \dots , X_p \} \text{ est générateur }) \Leftrightarrow (\forall X\in \mathbf{V}, \exists\lambda_i\in\mathbf{R}(i=1\dots p); X =\sum_{i=1}^{p} \lambda_i X_i).$$

On dit aussi que les X_i **engendrent V**.

Exemples :
1) Si nous reprenons **Exercez-vous 4**, on a alors montré que (1,0) et (1,1) engendrent $\mathbf{IR}^2$.

2) Si S = $\{X_1, \dots , X_p\}$, S est générateur de $< X_1, \dots , X_p >$.

4.3. Systèmes libres (ou indépendants), systèmes liés (ou dépendants)

Dans le paragraphe précédent, nous nous sommes intéressés aux systèmes de vecteurs générateurs, mais on peut se poser la question de savoir si ces systèmes ne comportent pas trop de vecteurs, si certains ne sont pas *liés* aux autres par combinaisons linéaires. D'où la définition suivante :

Définition : On dit que $\{X_1 , X_2 , \dots , X_m\}$ est un **système lié** si et seulement si il existe des réels $\lambda_1 , \lambda_2 , \dots , \lambda_m$ **non tous nuls** tels que $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i X_i = \mathbf{0}$.

Dans ce cas on dit aussi que les vecteurs Xi sont linéairement **dépendants**.

Remarques : 1) Cela équivaut à dire qu'au moins un des vecteurs (correspondant à λ_i non nul) s'exprime en fonction des autres. Car si $\lambda_i \neq 0$:

$$X_i = - \frac{1}{\lambda_i}(\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \dots + \lambda_{i-1} X_{i-1} + \lambda_{i+1} X_{i+1} + \lambda_m X_m)$$

2) Deux vecteurs liés sont proportionnels.

Par contre s'il n'existe pas de λ_i **non tous nuls** tels que $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i X_i = \mathbf{0}$, on dit que le système est un système **libre** ou que les vecteurs X_i sont linéairement **indépendants**.

Définition : $\{X_1 , X_2 , \dots , X_m\}$ est un **système libre** si et seulement si :

$$\left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i X_i = \mathbf{0} \right) \Leftrightarrow (\lambda_i = 0 \text{ pour } i=1,2,\dots,m).$$

Définition : On appelle **rang** d'un ensemble (ou d'une famille) de vecteurs, le nombre le plus grand de vecteurs indépendants de l'ensemble.

4.4. Un outil utile : le déterminant

Pour exprimer que deux vecteurs u(x,y) et v(x',y')de **IR**^{2} sont liés, on peut écrire que leurs coordonnées sont proportionnelles , soit xy' - yx' = 0 et cela se note $\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = 0$. Cette notation est le **déterminant** des vecteurs u et v.

De même pour exprimer que 3 vecteurs de **IR**^{3} sont liés, on pourra écrire que leur déterminant est nul : si u(x,y,z) , v(x',y',z') et w(x",y",z"), le déterminant de u, v et w

sera : $D = \begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix} = xy'z'' + x'y''z + x''yz' - (x''y'z + x'yz'' + xy''z')$. Ce calcul se fait suivant la règle de Sarrus , dont on observera la symétrie pour bien la retenir. On a le schéma suivant :

$$\begin{vmatrix} x & x' & x'' & x & x' \\ y & y' & y'' & y & y' \\ z & z' & z'' & z & z' \end{vmatrix}$$

les produits le long des flèches descendantes de gauche à droite étant attribués du signe + et les autres (pointillées montantes de gauche à droite) du signe -.

Ainsi (résultat **admis** mais **très utile**):

$\{ u(x,y,z) , v(x',y',z') , w(x'',y'',z'') \}$ est lié **si et seulement** si $D = \begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix} = 0$.

4.5. Bases et dimension d'un espace vectoriel

Nous considèrerons à partir de ce paragraphe des espaces vectoriels engendrés par un nombre fini de vecteurs. La notion de base d'un espace vectoriel correspond à celle d'un système générateur minimal, c'est à dire comportant le moins de vecteurs possible.

Définition : Soit **V**, un espace vectoriel sur **IR**, on appelle **base** de **V**, tout système générateur libre.

Propriété: Un système de vecteurs **B** est une base de **V**, si et seulement si tout vecteur de **V** peut s'écrire de façon **unique** comme combinaison linéaire d'éléments de **B**.

Soit, si $\mathbf{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ tout X de **V** s'écrit $X = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et les x_i sont uniques.

C'est l'intérêt des bases par rapport aux systèmes générateurs quelconques, ici la **décomposition est unique.**

Démonstration :
Supposons que $\mathbf{B} = \{e_1 , e_2 , \dots , e_n\}$ soit générateur et libre. Soit $X \in \mathbf{V}$, puisque **B** est générateur il existe des réels $x_1, x_2, \dots , x_n$ tels que $X = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$. Supposons que cette décomposition ne soit pas unique et montrons que c'est absurde (raisonnement par l'absurde) ; soit donc $\sum_{i=1}^{i=n} x'_i e_i$ une autre décomposition de X. On a donc $\sum_{i=1}^{n} x_i e_i = \sum_{i=1}^{n} x'_i e_i$ et $\sum_{i=1}^{n} (x_i - x'_i)\, e_i = \mathbf{0}$ et l'un au moins des x_i est différent de x'_i ce qui contredit le fait que **B** soit libre, puisque l'un au moins des coefficients est non nul. D'où le résultat.

Réciproque : Supposons que tout vecteur de **V** se décompose de façon unique à l'aide des vecteurs de **B** et montrons que **B** est générateur et libre.

B est évidement générateur. D'autre part si $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = \mathbf{0}$ la décomposition de **O** étant unique et de la forme $\sum_{i=1}^{n} 0.e_i$, on en déduit que $\lambda_i = 0$ pour $i = 1 , 2 , \dots , n$. **B** est donc bien libre.

Les coefficients x_i intervenant dans la décomposition de X suivant la base **B** sont appelés **coordonnées** de X dans la base **B**. Ces coordonnées **dépendent évidemment de la base** choisie. On représente souvent les coordonnées d'un vecteur X par rapport à une base, sous la forme d'une **matrice colonne** : $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$

B = {(1,0) ; (0,1)} apparaît comme étant la base naturelle de $\mathbf{IR}^2$, aussi on l'appelle **base canonique** de $\mathbf{IR}^2$. Dans **B**, (x,y) a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

De même **B** = {(1,0,0) ; (0,1,0) ; (0,0,1)} est la base canonique de $\mathbf{IR}^3$. Et dans **B**, (x,y,z) a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Ceci peut se généraliser à $\mathbf{IR}^n$.
B = {(1,0,0,…,0) , (0,1,0,0,…,0) ; … ; (0,0,…,0,1) } est la base canonique de $\mathbf{IR}^n$ et si X = $(x_1,x_2, \dots ,x_n)$, X = $x_1(1,0,0,\dots,0) + x_2(0,1,0,\dots,0) + \dots + x_n(0,0,\dots,1)$

et les coordonnées de X dans **B** sont données par : $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$.

On admettra que :

Théorème et définition : Les bases d'un espace vectoriel **V** engendré par un nombre fini de vecteurs ont le même nombre de vecteurs. Ce nombre s'appelle la **dimension** de l'espace vectoriel et est notée dim**V**.

Propriété : Pour tout système Σ de p vecteurs d'un espace vectoriel **V** de dimension n , on a les propriétés suivantes :

*rang $\Sigma \leq n$
*(rang $\Sigma = n$) $\Leftrightarrow$ (Σ est un système générateur de **V**)
*(rang $\Sigma = n$ et $p = n$) $\Leftrightarrow$ (Σ est une base de **V**)
*(rang $\Sigma = n$ et $p \geq n$) $\Leftrightarrow$ (on peut extraire de Σ une base de **V**)

On admet que :

Théorème de la base incomplète : Si Σ est un système de vecteurs d'un espace vectoriel de dimension n et si rang $\Sigma = r$ avec $r < n$, on peut construire une base de **V** contenant r vecteurs de Σ.

Autrement dit, puisque Σ est de rang r, Σ contient r vecteurs $X_1, X_2, \ldots , X_r$ indépendants. Ces r vecteurs forment un système libre qui peut être complété par
n-r vecteurs pour former une base de **V** :

$$\{X_1 , X_2 , \ldots , X_r , e_1 , e_2 , \ldots , e_{n-r} \} .$$

Tout système libre est inclus dans une base et tout système générateur contient une base.

La propriété suivante est à retenir, elle peut être très utile pour les exercices et pour les années suivantes.

Propriété : Si A et B sont deux sous espaces vectoriels de R^n tels que :
$A \subset B$ et dim A = dim B. Alors A = B.

En effet si dim A = dim B = p, une base de A est formée de p vecteurs $V_1, \ldots, V_p$ indépendants qui engendrent A, ces p vecteurs indépendants appartiennent aussi à B puisque $A \subset B$ et forment une base de B étant donné qu'ils sont au nombre de p = dim B. A et B sont deux sous espaces vectoriels engendrés par les mêmes vecteurs, ils sont donc égaux.

Conséquence : Si A est un sous espace vectoriel de $\mathbf{R}^n$ de dimension n, A = $\mathbf{R}^n$.

Exercices

Les exercices avec une * sont intéressants mais plus difficiles et peuvent être sautés.

Exercice 1 -Soit X_1, X_2 et X_3 , trois vecteurs de $\mathbf{IR}^3$ tels que :
$X_1 = (-1,5,2)$, $X_2 = (2,-1,2)$ et $X_3 = (1,1,3)$
1) Calculer les combinaisons linéaires suivantes : $3X_1 - 2X_2 + X_3$; $3(X_1-X_3) + X_2$
2) Trouver trois réels α , β et γ non nuls, tels que $\alpha X_1 + \beta X_2 + \gamma X_3$ ait ses deux premières composantes nulles .

Exercice 2-Les ensembles suivants sont-ils des sous espaces vectoriels de $\mathbf{IR}^3$?
$A = \{(x,y,z)\in\mathbf{IR}^3 ; 3x -5y + z = 0 \}$; $B = \{(x,y,z)\in\mathbf{IR}^3 ; 2x - 3y + 5z = 1 \}$
$C = \{(x,y,z)\in\mathbf{IR}^3 ; 2x + 3y + z \geq 0 \}$; $D = \{(x,y,z)\in\mathbf{IR}^3 ; xyz = 0 \}$
$E = \{(x,y,z)\in\mathbf{IR}^3 ; (x,y,z) = (x+y+z)(2,3,1) + (x-y)(5,-1,2) \}$

Exercice 3*-Montrer que l'ensemble **E** des fonctions f de la variable x définies sur [0,1] et vérifiant $f(1) = 2f(0)$ peut être muni d'une structure d'espace vectoriel.
En est-il de même pour l'ensemble **F** des fonctions g définies sur [0,1] et vérifiant
$g(1) = g(0) + 1$?

Exercice 4-Les ensembles suivants sont-ils des sous espaces vectoriels de $\mathbf{R}^4$?
$F = \{(x,y,z,t)\in\mathbf{R}^4 ; z = 0\}$; $G = \{(x,y,z,t)\in\mathbf{R}^4 ; y \leq 0 \}$;
$H = \{(x,y,z,t)\in\mathbf{R}^4 ; y = z+t\}$; $I = \{(x,y,z,t)\in\mathbf{R}^4 ; xy = 0\}$;
$J = \{(x,y,z,t)\in\mathbf{R}^4 ; y\in\mathbf{Q} \}$; $K = \{(x,y,z,t)\in\mathbf{R}^4 ; z = x^2 \}$

Exercice 5-Les vecteurs suivants engendrent-ils $\mathbf{R}^3$:
1) (2,-1,4) , (3,1,2) et (0,2,-1).
2) (4,-1,0) , (1,1,1) et (-7,3,1).
3) (1,1,2) , (-3,2,1) , (0,5,7) et (0,1,-1).

Exercice 6-Montrer que dans ces différents cas X_1 , X_2 et X_3 sont dépendants et trouver une relation entre X_1, X_2 et X_3 .
1) $X1 = (1,-1,0)$, $X_2 = (2,4,2)$ et $X_3 = (2,7,3)$
2) $X1= (2,3,-1)$, $X_2 = (0,-1,3)$ et $X_3 = (-3,-4,0)$
3) $X1 = (8,2,1)$, $X_2 = (-1,3,5)$ et $X_3 = (10,22,32)$

Exercice 7-Déterminer si les familles suivantes sont libres ou liées et donner leur rang
1) {(2,1) , (-3,2) , (4,3) , (1,1)}
2) {(4,1) , (2,3)}
3) {(3,-1,2) , (4,1,1) , (0,-2,1)}
4) {(0,3,2,-1) , (3,-2,1,1) , (1,1,1,1) , (4,-3,1,-2)

Exercice 8-Déterminer le rang des systèmes suivants :
1) {(0,1) , (1,-2) , (4,3) }

2) $\{(3,1,2) , (4,2,0) , (1,3,-2)\}$
3) $\{(0,1,0,2) , (1,1,-1,0) , (2,0,1,1)\}$
4) $\{(1,-1,0) , (2,0,1) , (2,6,4)\}$

Exercice 9-L'ensemble $S = \{(2,1,1) , (0,3,5) , (2,4,6) , (1,6,6)\}$ forme-t-il une base de $\mathbf{R}^3$? Extraire une base de $\mathbf{R}^3$? Combien de bases de $\mathbf{R}^3$ peut-on extraire de S ?

Exercice 10-On considère des ensembles $\mathbf{E} = \{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \,;\, y = 2x\}$ et $\mathbf{F} = \{(x,x)\in\mathbf{R}^2\}$. Montrer que **E** et **F** sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^2$ et déterminer $\mathbf{E}\cap\mathbf{F}$.

Exercice 11-On considère les ensembles suivants :

$\mathbf{E} = \{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 \,;\, x = y = z\}$; $\mathbf{F} = \{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 \,/\, x-2y+z = 0\}$ et

$\mathbf{G} = \{(a-b,a+b,2a-3b) \,;\, a\in\mathbf{R} \text{ et } b\in\mathbf{R}\}$.

1) Montrer que **E**, **F** et **G** sont des sous espaces vectoriels de $\mathbf{R}^3$.
2) Déterminer les sous espaces vectoriels $\mathbf{E}\cap\mathbf{F}$, $\mathbf{E}\cap\mathbf{G}$ et $\mathbf{F}\cap\mathbf{G}$.

Exercice 12-Donner une base et la dimension du sous espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$ défini par:
$\{(x,y,z,t)\in\mathbf{R}^4 \,;\, x - y + z + t = 0\}$
En déduire le rang du système suivant :
$\{(0,1,2,-1) , (1,0,-2,1) , (3,2,0,-1) , (1,1,-1,1)\}$

Exercice 13-Donner une base et la dimension du sous espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$ défini par:
$\{(x,y,z,t)\in\mathbf{R}^4 \,;\, x + y - z = 0 \text{ et } x - y + 2t = 0\}$

Exercice 14-Soient trois vecteurs linéairement indépendants e_1, e_2 et e_3 d'un espace vectoriel **V**. Que peut-on dire de dim**V** ?

Exercice 15-Donner une base et la dimension du sous espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$ défini par:
$\{(\lambda-\mu , \lambda+\mu , 2\lambda-\mu) \,;\, \lambda\in\mathbf{R} \text{ et } \mu\in\mathbf{R} \}$

Exercice 16-1) Montrer que l'ensemble $\mathbf{E} = \{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 \,;\, x-2y+z = 0\}$ est un sous espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$.
2) Soit **F** le sous espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$ engendré par les vecteurs (1,1,1) et (3,1,-1). Vérifier que $\mathbf{F} \subseteq \mathbf{E}$. A-t-on $\mathbf{E} = \mathbf{F}$?

Exercice 17-1) Montrer que l'ensemble $\mathbf{E} = \{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 \,;\, 2x-y+2z = 0\}$ est un sous espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$. Déterminer une base et la dimension de **E**.
2) Soit **F** le sous espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$ engendré par les vecteurs $u = (1,2,0)$ et $v = (2,1,1)$, déterminer que $\mathbf{E} \cap \mathbf{F}$.

Exercice 18-Montrer que, dans les différents cas suivants, le système $\{e_1, e_2 , e_3\}$ est une base de $\mathbf{R}^3$. Exprimer les coordonnées de (-1,2,3) puis celle de (x,y,z) dans cette base .

1) $e_1 = (-1,0,1)$; $e_2 = (1,-1,0)$; $e_3 =(1,1,1)$
2) $e_1 = (1,2,0)$; $e_2 = (0,1,1)$; $e_3 = (1,0,2)$
3) $e_1 = (1,0,2)$; $e_2 = (1,1,2)$; $e_3 = (0,1,1)$

Exercice 19-Démontrer que dans l'espace vectoriel $\mathbf{R}^3$, les vecteurs $u = (2,3,-1)$ et $v = (1,-1,-2)$ d'une part, et les vecteurs $u' = (3,7,0)$ et $v' = (5,0,-7)$ d'autre part, engendrent le même sous espace vectoriel.

Exercice 20-Montrer que les ensembles suivants sont des sous espaces vectoriels de $\mathbf{R}^4$ dont on déterminera la dimension et une base :

$A = \{(\lambda+\mu , 2\lambda , \lambda-2\mu , \mu) ; \lambda\in\mathbf{R} , \mu\in\mathbf{R}\}$
$B = \{(x,y,z,t)\in\mathbf{R}^4 ;\ x-z = y-t \}$

Exercice 21- Soit $S_1= \{ u_1=(a,1,1) , u_2=(-1,-a,-1) , u_3=(1,1,a) \}$
et $S_2 = \{v_1=(a,1,1) , v_2=(-1,-a,-1) , v_3=(-1,-1,a) \}$
Déterminer suivant les valeurs de a le rang de S_1 ainsi que celui de S_2.

Exercice 22-Soit $v_1 = (4,0,-2)$, $v_2 = (-8,1,5)$ et $v_3 = (2,0,0)$. Ces vecteurs sont-ils indépendants? On considère le sous espace vectoriel **V** engendré par v_1 et v_2. Quelle est sa dimension ? Donner une base de **V**. v_3 appartient-il à **V**? $v_4 = (-4,2,4)$ appartient-il à **V**? A quelle condition sur a, b et c un vecteur $w = (a,b,c)$ appartient-il à **V**?

Exercice 23- 1)Soit $V_1 = (-1,1,0)$, $V_2 = (1,0,2)$ et **F**, le sous espace vectoriel engendré par V_1 et V_2.

a) A quelle condition sur x, y et z, $V = (x,y,z)$ appartient-il à **F** ?

b) Soit $V_3 = (1,1,-1)$, $V_4 = (1,1,2)$ et $V_5 = (0,1,2)$. Déterminer les rangs des systèmes suivants :

$\{ V_1 , V_2 , V_3 \}$, $\{ V_1 , V_2 , V_4 \}$, $\{ V_1 , V_2 , V_5 \}$ et $\{ V_1 , V_2 , V_3 , V_4 \}$.

2)* On se place dans un espace vectoriel de dimension $n \geq 2$. Dire si la proposition suivante est vraie :

$(S = \{ e_1 , e_2 , e_3 \} \text{ lié}) \Rightarrow (e_3\in< e_1 , e_2 >)$.

Si la réponse est affirmative, la prouver. Si la réponse est négative, donner un contre-exemple.