Leçon 08 – Exercices

Exercice 1 Indiquer les plus grands sous-ensembles possibles de $\mathbb{R}^2$ sur lesquels on puisse définir les fonctions suivantes, construire ces ensembles dans un plan.
$g_1 : (x,y) \in D_1 \rightarrow \ln(xy)$ $g_2 : (x,y) \in D_2 \rightarrow \ln(x^2 - y)$.

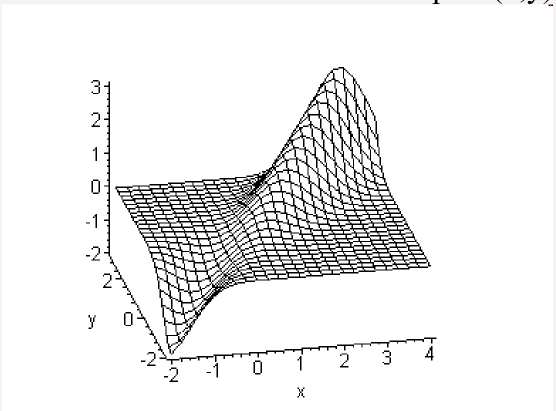
Exercice 2 On considère la fonction numérique de 2 variables réelles définie sur
$Dg = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; y = -x\}$ par $g: (x,y) \in D_g \rightarrow \dfrac{2x - y}{x + y}$.
1) Représenter graphiquement le domaine de définition D_g.
2) On se limite aux couples (x,y) tels que y = 2x. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} g(x,2x)$.
3) On se limite aux couples (x,y) tels que y = 3x. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} g(x,3x)$.
4) Etudier la limite éventuelle de g en (0, 0).

Exercice 3
1) Montrer que pour tout (x,y) de $\mathbb{R}^2$, $-(x^2 + y^2) \leq 2xy \leq x^2 + y^2$
2) En déduire l'existence et la valeur de la limite suivante :
$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$. On pourra utiliser directement la définition donnée en cours d'une fonction de deux variables, ou plus facilement, poser $z = x^2 + y^2$ et encadrer l'expression $\dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ à l'aide d'une expression d'une seule variable réelle.

Exercice 4 : Courbes de niveau.
On définit sur $\mathbb{R}^2$ la fonction :
$f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow f(x,y) = y\exp(2xy)$.
1) Calculer la différentielle de f.
1) Que penser de la ligne de niveau 0 ?
2) Montrer que la ligne de niveau 1 est incluse dans l'ensemble $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; y > 0 \}$, qu'elle est une courbe sur laquelle l'abscisse x est une certaine fonction de l'ordonnée y, et exprimer cette fonction d'y.

Exercice 5 Indiquer quel est le plus grand sous-ensemble D de $\mathbb{R}^2$ sur lequel on peut définir la fonction $f : (x,y) \in D \rightarrow f(x,y) = \dfrac{\ln(xy - 1)}{x}$.

Exercice 6 On considère la fonction définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x\exp(-(x-y)^2)$.



1) Déterminer la différentielle de f.

2) Pour y fixé à une valeur $y = y_0$, on considère la fonction $f_1 : x \in \mathbb{R} \mapsto f(x, y_0)$

Etudier ses variations et montrer qu'elle est majorée par un nombre ne dépendant que de y_0.

Pour x fixé à une valeur $x = x_0$, on considère la fonction

f_2; $y \in \mathbb{R} \mapsto f(x_0, y)$. Etudier ses variations et montrer qu'elle est majorée par un nombre ne dépendant que de x_0.

3) On considère à nouveau f et on se restreint aux (x,y) de $\mathbb{R}^2$ tels que $x = y$.

Montrer que f n'est majorée par aucun nombre.

Exercice 7 On cherche les fonctions f définies et différentiables sur $\mathbb{R}^2$ telles que

$$df = (y^2+4x)dx + (2xy-y)\,dy$$

1) On fixe une valeur y_0 pour y. Quelles sont les fonctions numériques d'une variable, g, définies sur $\mathbb{R}$, telles que $g'(x) = y_0^2+4x$?

2) En déduire quelles sont les fonctions f de 2 variables définies sur $\mathbb{R}^2$ telles que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=y^2+4x.$$

3) En déduire quelles sont les fonctions de 2 variables f(x,y) définies et différentiables sur $\mathbb{R}^2$ telles que $df = (y^2+4x)dx + (2xy-y)\,dy$ sur tout $\mathbb{R}^2$.

Exercice 8

(On pourra s'inspirer de l'exercice précédent)

Déterminer toutes les fonctions numériques f de 2 variables réelles, différentiables sur $\mathbb{R}^2$, telles que

$$df = (y+1)\,dx + (x+e^y)\,dy.$$

Exercice 9

Montrer qu'on ne peut trouver de fonction f définie et différentiable sur $\mathbb{R}^2$ telle que $df = (y^2+xy)\,dx + (2xy-y)\,dy$ pour tout (x,y) de $\mathbb{R}^2$.