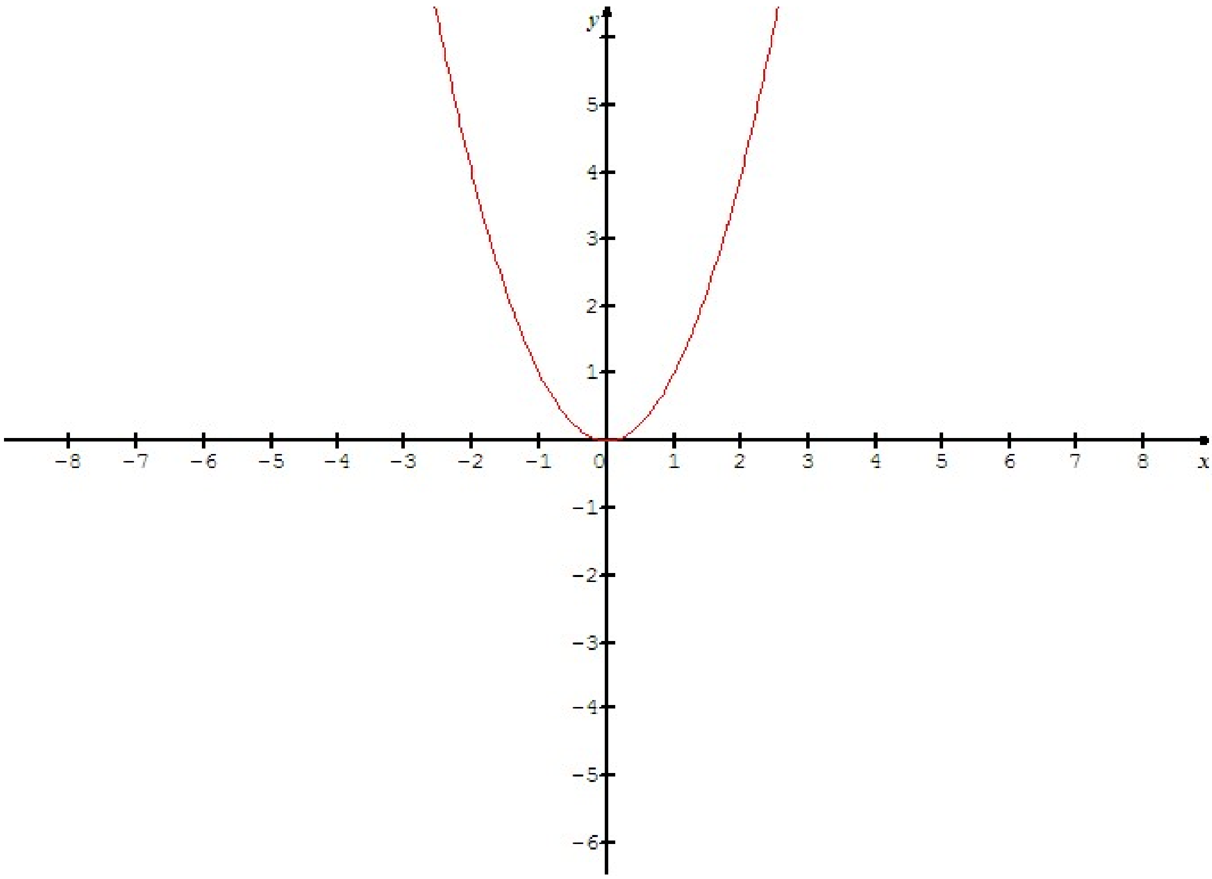
Leçon 08 – Correction des exercices

Exercice 1 Indiquer les plus grands sous-ensembles possibles de $\mathbb{R}^2$ sur lesquels on puisse définir les fonctions suivantes, construire ces ensembles dans un plan.
$g_1 : (x,y) \in D_1 \to \ln(xy)$ $\qquad g_2 : (x,y) \in D_2 \to \ln(x^2 - y)$.

Solution

g_1 est définie si et seulement si $xy > 0$. x et y sont donc non nyls et de même signe. Cela correspond aux deux secteurs frontières non comprises, le premier et le troisième quadrant.

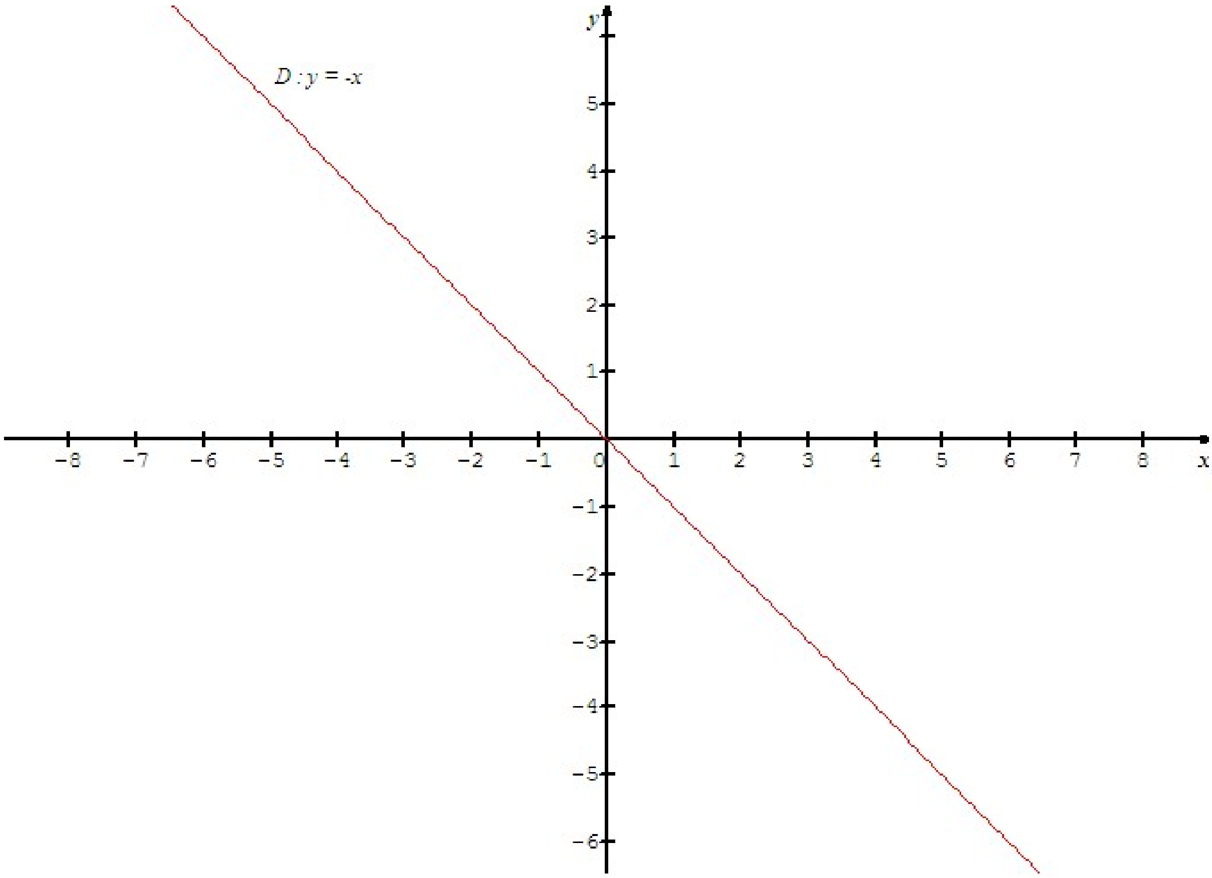
g_2 esr définie si et seulement si $x^2 - y > 0$. Soit $y < x^2$. La région correspondante est située sous la parabole d'équation $y = x^2$, parabole exclue.



Exercice 2 On considère la fonction numérique de 2 variables réelles définie sur
$D_g = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; y = -x\}$ par $g: (x,y) \in D_g \to \dfrac{2x - y}{x + y}$.
1) Représenter graphiquement le domaine de définition D_g.
2) On se limite aux couples (x,y) tels que y = 2x. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} g(x,2x)$.
3) On se limite aux couples (x,y) tels que y = 3x. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} g(x,3x)$.
4) Etudier la limite éventuelle de g en (0, 0).

Solution

1) D_g est le plan $\mathbf{IR}^2$ privé de la droite D d'équation y = -x :



2) $\lim\limits_{x \to 0} g(x,2x) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{2x - 2x}{x + 2x} = 0$

3) $\lim\limits_{x \to 0} g(x,3x) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{2x - 3x}{x + 3x} = -\frac{1}{4}$.

4) Si la limite de g en (0, 0) existe, elle est unique et la même sur tout voisinage de (0,0). Or tout voisinage de (0,0) contient des points de la forme (x,2x) et des points de la forme (x,3x). Pour ces points la limite de g en (0,0) est différente (0 ou $-\frac{1}{4}$ d'après 2) et 3)). Donc la limite de g en (0,0) n'existe pas.

Exercice 3

1) Montrer que pour tout (x,y) de $\mathbb{R}^2$, $-(x^2 + y^2) \leq 2xy \leq x^2 + y^2$

2) En déduire l'existence et la valeur de la limite suivante :

$\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$. On pourra utiliser directement la définition donnée en cours d'une fonction de deux variables, ou plus facilement, poser $z = x^2 + y^2$ et encadrer l'expression $\frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ à l'aide d'une expression d'une seule variable réelle.

Solution

1) $-(x^2 + y^2) - 2xy = -(x + y)^2 \leq 0$ donc $-(x^2 + y^2) \leq 2xy$ et l'inégalité de gauche est montrée.
$-2xy + x^2 + y^2 = (x - y)^2 \geq 0$ donc $2xy \leq x^2 + y^2$ et l'inégalité de droite est montrée.

2) D'après 1), puisque $\sqrt{x^2 + y^2} > 0$ pour $(x,y) \neq (0,0)$:

$$\frac{-(x^2 + y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Donc

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{-(x^2 + y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Or si on pose $z = x^2 + y^2$

$$\lim_{z\to 0} \frac{-z}{\sqrt{z}} \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq \lim_{z\to 0} \frac{z}{\sqrt{z}}$$

$$\lim_{z\to 0} -\sqrt{z} = 0 \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq \lim_{z\to 0} \sqrt{z} = 0.$$

D'où, d'après le théorème des gendarmes : $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0.$

Exercice 4 : Courbes de niveau.
On définit sur $\mathbb{R}^2$ la fonction :
$f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow f(x,y) = y\exp(2xy)$.
1) Calculer la différentielle de f.
1) Que penser de la ligne de niveau 0 ?
2) Montrer que la ligne de niveau 1 est incluse dans l'ensemble $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; y > 0 \}$, qu'elle est une courbe sur laquelle l'abscisse x est une certaine fonction de l'ordonnée y, et exprimer cette fonction d'y.

Solution

1) f admet des dérivées partielles d'ordre 1 continues sur $\mathbf{IR}^2$. Elle est donc différentiable sur $\mathbf{IR}^2$.
$\frac{\partial f}{\partial x} = 2y^2e^{2xy}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = e^{2xy} + 2xy\, e^{2xy}$. Donc

$$df = 2y^2e^{2xy}\,dx + (1 + 2xy)\, e^{2xy}\, dy$$

2) La ligne de niveau 0 a pour équation $y\, e^{2xy} = 0$. Or pour tous x et y $e^{2xy} > 0$. Donc

$$y\, e^{2xy} = 0 \Leftrightarrow y = 0$$

et la ligne de niveau 0 est l'axe des x, d'équation $y = 0$.

3) La ligne de niveau 1 a pour équation $y\, e^{2xy} = 1$. Et puisque pour tous x et y $e^{2xy} > 0$:

$$y\, e^{2xy} = 1 \Rightarrow y > 0.$$

Donc la ligne de niveau 1 est incluse dans l'ensemble $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; y > 0 \}$.
Et puisque $y > 0$,

$$y\, e^{2xy} = 1 \Rightarrow e^{2xy} = \frac{1}{y}$$

soit $2xy = \ln(\frac{1}{y})$ ou $x = \frac{1}{2y} \ln(\frac{1}{y})$. Donc la ligne de niveau 1 est aussi sur la courbe d'équation $x = \frac{1}{2y} \ln(\frac{1}{y})$.

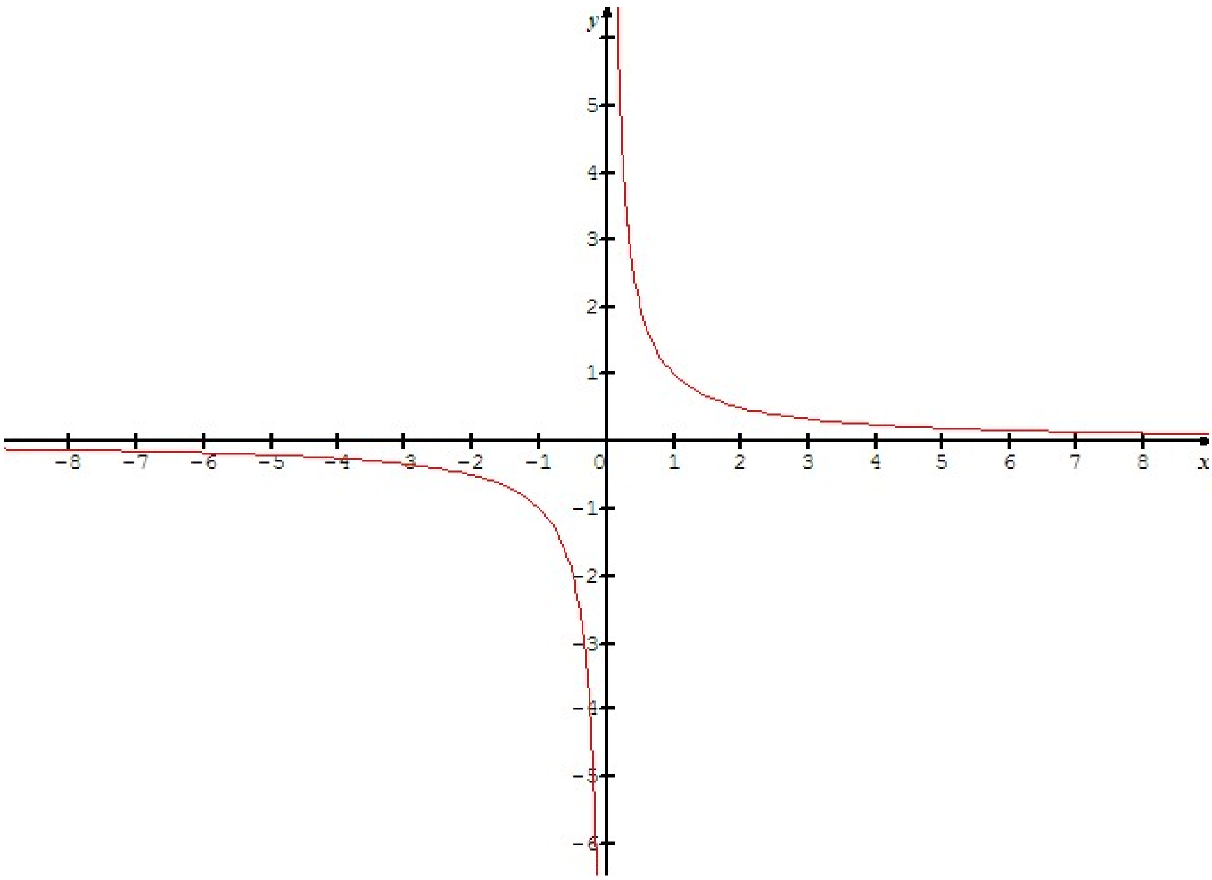
Exercice 5 Indiquer quel est le plus grand sous-ensemble D de $\mathbb{R}^2$ sur lequel on peut définir la fonction $f : (x,y)\in D \to f(x,y) = \frac{\ln(xy - 1)}{x}$.

Solution

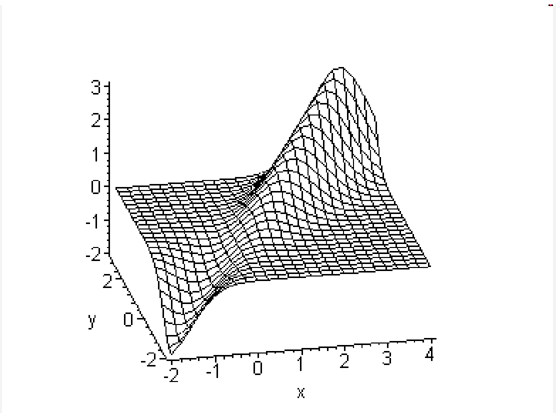
1) f est définie si et seulement si $x \neq 0$ et $xy - 1 > 0$.

Donc f est définie si et seulement si $x > 0$ et $y > \frac{1}{x}$ ou si $x < 0$ et $y < \frac{1}{x}$.

D est donc la région du premier quadrant qui se trouve au dessus de l'arc d'hyperbole d'équation $y = \frac{1}{x}$ et $x > 0$ et la région du troisième quadrant qui se trouve e dessous de l'arc d'hyperbole d'équation $y = \frac{1}{x}$ et $x < 0$.



Exercice 6 On considère la fonction définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x \exp(- (x - y)^2)$.



1) Déterminer la différentielle de f.
2) Pour y fixé à une valeur $y = y_0$, on considère la fonction f_1: $x \in \mathbb{R} \mapsto f(x, y_0)$
Etudier ses variations et montrer qu'elle est majorée par un nombre ne dépendant que de y_0.
Pour x fixé à une valeur $x = x_0$, on considère la fonction
f_2; $y \in \mathbb{R} \mapsto f(x_0, y)$. Etudier ses variations et montrer qu'elle est majorée par un nombre ne dépendant que de x_0.
3) On considère à nouveau f et on se restreint aux (x,y) de $\mathbb{R}^2$ tels que x = y.
Montrer que f n'est majorée par aucun nombre.

Solution

1) f admet des dérivées partielles d'ordre 1 continues sur $\mathbf{IR}^2$. Elle est donc différentiable sur $\mathbf{IR}^2$.

$\dfrac{\partial f}{\partial x} = \exp(-(x-y)^2) + x(-2x+2y)\exp(-(x-y)^2)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = x(2x-2y)\exp(-(x-y)^2)$. D'où

$$df = (1 - 2x^2 - 2xy)\exp(-(x-y)^2)dx + (2x^2 - 2xy)\exp(-(x-y)^2)dy.$$

2) $f_1(x) = x\exp(-(x-y_0)^2)$.
$f_1'(x) = \exp(-(x-y_0)^2)(-2x^2 - 2xy_0 + 1)$.
$-2x^2 - 2xy_0 + 1$ est un trinôme du second degré dont le discriminant est $\Delta = 4y_0^2 + 8 > 0$.
Ce trinôme a donc deux racines x_1 et x_2 de signes différents puisque leur produit est $-\dfrac{1}{2} < 0$, il est négatif sur $]-\infty, x_1[\cup]x_2, +\infty[$ et positif sur $]x_1, x_2[$. D'autre part $x_1 = \dfrac{2y_0 + \sqrt{4y_0^2+8}}{-4}$

$x_1 = \dfrac{-y_0 - \sqrt{y_0^2+2}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{-y_0 + \sqrt{y_0^2+2}}{2}$. x_1 et x_2 ne dépendent que de y_0.

On a le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$ $\qquad$ x_1	x_2	$+\infty$
$f_1'(x)$	-	+	-
f_1	$0 \searrow f_1(x_1)$	$\nearrow f_1(x_2)$	$\searrow 0$

Donc $f_1(x)$ est majorée par $f_1(x_1) = x_2\exp(-(x_2 - y_0)^2) > 0$ et ne dépend que de y_0 puisque x_2 ne dépend que de y_0.

$f_2(y) = x_0\exp(-(x_0 - y)^2)$ et $f_2'(y) = x_0(2x_0 - 2y)\exp(-(x_0 - y)^2)$

Si $x_0 = 0$, $f_2(y)$ est nulle pour tout y.

Si $x_0 > 0$ on a le tableau de variations suivant :

y	$-\infty$ $\qquad$ x_0	$+\infty$
$f_2'(y)$	$-$ $\qquad$ 0	$+$
f_2	0 $\searrow$ $f_2(x_0) = x_0$	$\nearrow$ 0

Et f_2 est minorée par x_0 et majorée par 0.

y	$-\infty$ $\qquad$ x_0	$+\infty$
$f_2'(y)$	$+$ $\qquad$ 0	$-$
f_2	0 $\nearrow$ $f_2(x_0) = x_0$	$\searrow$ 0

Et f_2 est majorée par x_0 et minorée par 0.

3) $f(x,x) = x$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x,x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x,x) = +\infty$ et $f(x,x)$ n'est ni majorée, ni bornée.

Exercice 7 On cherche les fonctions f définies et différentiables sur $\mathbb{R}^2$ telles que

$$df = (y^2+4x)dx + (2xy-y)\,dy$$

1) On fixe une valeur y_0 pour y. Quelles sont les fonctions numériques d'une variable, g , définies sur $\mathbb{R}$, telles que $g'(x) = y_0^2+4x$?

2) En déduire quelles sont les fonctions f de 2 variables définies sur $\mathbb{R}^2$ telles que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=y^2+4x.$$

3) En déduire quelles sont les fonctions de 2 variables f(x,y) définies et différentiables sur $\mathbb{R}^2$ telles que $df = (y^2+4x)dx + (2xy-y)\,dy$ sur tout $\mathbb{R}^2$.

Solution

1) Si $g'(x) = y_0^2 + 4x$, $g(x) = y_0^2 x + 2x^2 + C$ (C est une constante réelle quelconque).

2) D'après 1) et la définition de $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, $f(x,y) = y^2x + 2x^2 + \varphi(y)$, où $\varphi(y)$ est une fonction de y seulement.

3) Si $f(x,y) = y^2x + 2x^2 + \varphi(y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)= 2yx + \varphi'(y)$. Et puisque $df = (y^2+4x)dx + (2xy-y)\,dy$, on a aussi $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)= 2xy - y$. En identifiant les deux valeurs de $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$, on obtient $\varphi'(y) = -y$ et $\varphi(y) = -\frac{1}{2}y^2 + C$ (C est une constante réelle quelconque).

$$\text{D'où } f(x,y) = 2xy + 2x^2 - \frac{1}{2}y^2 + C.$$

La solution est bien différentiable sur $\mathbf{IR}^2$.

Exercice 8
(On pourra s'inspirer de l'exercice précédent)
Déterminer toutes les fonctions numériques f de 2 variables réelles, différentiables sur $\mathbb{R}^2$, telles que

$$df = (y+1)\,dx + (x+e^y)\,dy.$$

Solution

1) Avec les mêmes notations que dans l'exercice précédent :

Si $g'(x) = y_0 + 1$, $g(x) = y_0 x + x + C$ (C est une constante réelle quelconque).

2) D'après 1) et la définition de $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, $f(x,y) = yx + x + \varphi(y)$, où $\varphi(y)$ est une fonction de y seulement.

3) Si $f(x,y) = yx + x + \varphi(y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x + \varphi'(y)$. Et puisque $df = (y+1)\,dx + (x+e^y)\,dy$, on a aussi $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x + e^y$. En identifiant les deux valeurs de $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$, on obtient $\varphi'(y) = e^y$ et $\varphi(y) = e^y + C$ (C est une constante réelle quelconque).

$$\text{D'où } f(x,y) = yx + x + e^y + C.$$

La solution est bien différentiable sur $\mathbf{IR}^2$.

Exercice 9
Montrer qu'on ne peut trouver de fonction f définie et différentiable sur $\mathbb{R}^2$ telle que
$df = (y^2 + xy)\,dx + (2xy - y)\,dy$ pour tout (x,y) de $\mathbb{R}^2$.

Solution

1) En s'inspirant des exercices précédents, si $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y^2 + xy$, $f(x,y) = y^2x + \frac{1}{2}x^2y + \varphi(y)$.

Si $f(x,y) = y^2x + \frac{1}{2}x^2y + \varphi(y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2xy + \frac{1}{2}x^2$.

Or si $df = (y^2 + xy)\,dx + (2xy - y)\,dy$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2xy - y$. Les deux formes de $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ sont incompatibles. On ne peut donc pas trouver de fonction f définie et différentiable sur $\mathbb{R}^2$ telle que $df = (y^2 + xy)\,dx + (2xy - y)\,dy$ pour tout (x,y) de $\mathbb{R}^2$.