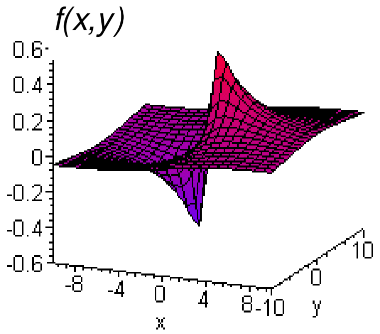
Exercez-vous 1

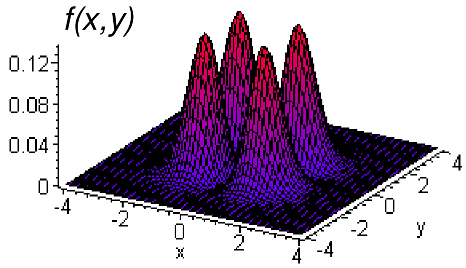
a) montrer que des lignes de niveau différentes, pour une même fonction de 2 variables, n'ont aucun point d'intersection.

b) Montrer que la fonction précédente: f : $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto f(x,y) = \dfrac{1}{(x-5)^2 + 3(y-1)^2 + 1}$ admet effectivement un maximum (global) en x=5, y = 1.

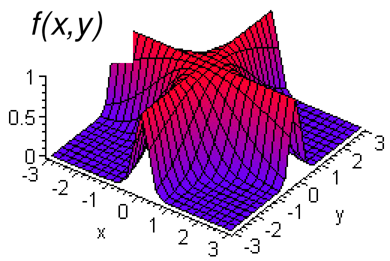
c) associez les lignes de niveau aux graphiques en 3 dimensions



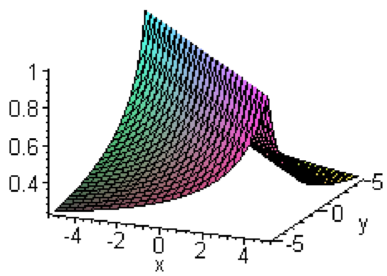
1



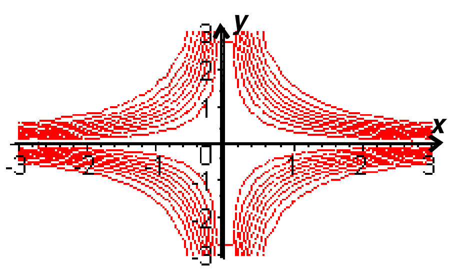
2



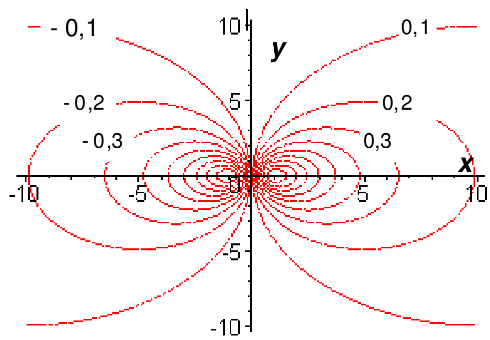
2



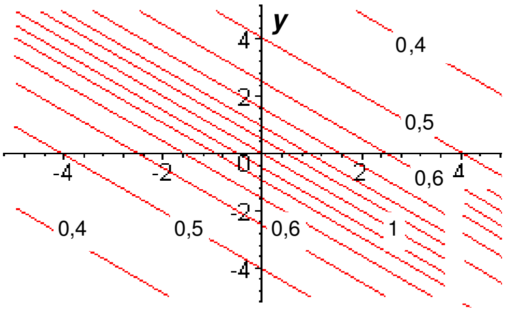
4



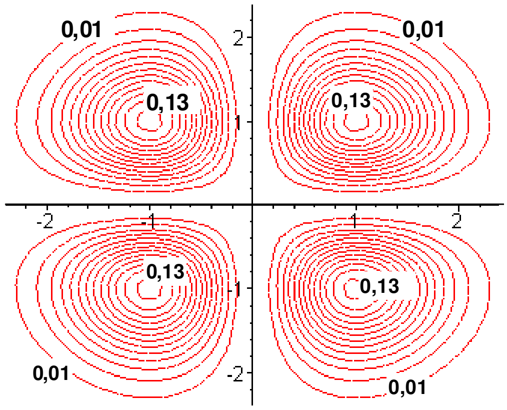
A



B



C



D

Solution

a) Pour une fonction f de deux variables, la ligne de niveau m est l'ensemble des (x,y) tels que f(x,y) = m , et la ligne de niveau p est l'ensemble des (x,y) tels que f(x,y) = p.
Si $m \neq p$, il est impossible qu'un même couple (x,y) vérifie f(x,y) = m et f(x,y)=p, il est donc impossible qu'un point appartienne à plus d'une ligne de niveau.

b) Pour tout (x,y) de $\mathbb{R}^2$ ¸ $(x-5)^2 \geq 0$ et $(x-1)^2 \geq 0$, donc $(x-5)^2 + 3\,(x-1)^2 + 1 \geq 1$, d'où $\dfrac{1}{(x-5)^2 + 3(y-1)^2 + 1} \leq 1$. Or f(5,1) = 1/1 = 1 . Donc f admet un maximum globale en (x,y) = (5,1).

c) les graphiques 1 et B sont associés : on voit sur ces 2 graphiques, et pas sur les autres, un maximum global et un minimum global.
Les graphiques 2 et D sont associés : sur ces 2 graphiques on voit 4 maxima symétriques par rapport au point (x = 0, y = 0).
le graphique 3 est associé au graphique A : sur ces 2 graphiques uniquement la fonction est extrémale sur toute la droite d'équation x = 0 et sur toute la droite d'équation y = 0.
Les graphiques 4 et C sont associés, sur eux seuls les lignes de niveau sont parallèles à une même droite.