

Leçon 08 – Correction des "Exercez-vous"

Exercez-vous 6 :

Indiquer sur quels ensembles les fonctions suivantes sont différentiables et donner leurs différentielles

- a) $f_1: (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \mapsto x \ln(y)$. b) $f_2: (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* \mapsto \frac{x}{y^2} + y$
c) $f_3: (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \mapsto y^x = e^{x \ln(y)}$

Solution

Ces 3 fonctions admettent des dérivées partielles continues sur tout leur ensemble de définition, donc elles y sont différentiables.

Pour tout (x,y) de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ $\frac{\partial f_1}{\partial x} = \ln(y)$ et $\frac{\partial f_1}{\partial y} = x/y$, d'où $df_1 = \ln(y) dx + \frac{x}{y} dy$

Pour tout (x,y) de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ $\frac{\partial f_2}{\partial x} = y^{-2}$ et $\frac{\partial f_2}{\partial y} = -2xy^{-3} + 1$, d'où

$df_2 = y^{-2} dx + (1 - 2xy^{-3}) dy$

Pour tout (x,y) de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ $\frac{\partial f_3}{\partial x} = \ln(y) e^{x \ln(y)}$ et $\frac{\partial f_3}{\partial y} = \frac{1}{y} e^{x \ln(y)} = y^{x-1}$ d'où

$df_3 = y^x \ln(y) dx + y^{x-1} dy$