

Leçon 08 – Correction des "Exercez-vous"

Exercez-vous 1

Calculer les dérivées troisièmes de $j : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^2 e^{-y}$

Solution

Dérivées premières :

$$\frac{\partial j}{\partial x} = 2x e^{-y} \quad \frac{\partial j}{\partial y} = -x^2 e^{-y}$$

Dérivées secondes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 j}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} (2x e^{-y}) = 2 e^{-y} & \frac{\partial^2 j}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} (-x^2 e^{-y}) = x^2 e^{-y} \\ \frac{\partial^2 j}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} (2x e^{-y}) = -2x e^{-y} & &= \frac{\partial^2 j}{\partial y \partial x} \end{aligned}$$

Dérivées troisièmes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 j}{\partial x^3} &= \frac{\partial}{\partial x} (2 e^{-y}) = 0 \\ \frac{\partial^3 j}{\partial x^2 \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 j}{\partial x \partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (-2x e^{-y}) = -2 e^{-y} \\ \frac{\partial^3 j}{\partial x \partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 j}{\partial x \partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (-2x e^{-y}) = -2 e^{-y} \\ \frac{\partial^3 j}{\partial y^3} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 j}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial}{\partial y} (x^2 e^{-y}) = -x^2 e^{-y} \end{aligned}$$

Ce sont les seules dérivées troisièmes à calculer, en effet j est le produit de 2 fonctions dérivables jusqu'à n'importe quel ordre. Ses dérivées troisièmes sont donc continues, donc

l'ordre de dérivation n'intervient pas, c'est-à-dire que $\frac{\partial^3 j}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^3 j}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial^3 j}{\partial y \partial x^2}$

et $\frac{\partial^3 j}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial^3 j}{\partial y \partial x \partial y} = \frac{\partial^3 j}{\partial y^2 \partial x}$