Leçon 08 – Correction des "Exercez-vous"

- -

Exercez vous 2

a) On considère g définie sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ par : $(x,y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* \mapsto g(x,y) = \dfrac{x^2 + y^2}{xy}$.

Etudier $\lim\limits_{x\to 0} g(x,2x)$, puis $\lim\limits_{x\to 0} g(x,3x)$. En déduire que g n'a pas de limite en (0,0).

b) On considère h définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$par : $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* \mapsto h(x,y) = \dfrac{x}{y}$.

Etudier $\lim\limits_{x\to 0} h(x,x)$, puis $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x; x^2)$. En déduire que h n'a pas de limite en (0,0)

Solution

a) pour y = 2x, on a : $g(x, 2x) = 5x^2 / x^2 = 5$, d'où $\lim\limits_{x\to 0} g(x,2x) = 5$,

pour y = 3x , on a $g(x,3x)= 10x^2/ x^2=10$, d'où $\lim\limits_{x\to 0} g(x, 3x) = 10$

Cela prouve que g n'a pas de limite en (0,0) : selon que (x,y) s'approche de (0,0) par la droite d'équation y = 2x ou par la droite d'équation y = 3x , la limite de f(x,y) n'est pas la même.

b) pour y = x, on a : h(x,x) = 1, d'où $\lim\limits_{x\to 0} h(x, x) = 1$, d'autre part , pour $y = x^2$,

$h(x,x^2) = 1/x$, d'où $\lim\limits_{x\to 0} h(x, x^2) = +\infty$

Donc h n'a pas de limite en (0,0) : selon que le couple (x,y) s'aproche de (0,0) par la droite d'équation y = x, ou par la parabole d'équation $y = x^2$, h(x,y) s'approche de 1 ou de $+\infty$.