Leçon 07 – Correction des exercices

Exercice 1. Un élevage comporte 120 rats de laboratoire le 01/04/02. Le nombre de rats augmente de 8% par jour. Combien y aura-t-il de rats dans l'élevage le 20/04/02 ?

Solution

Du 01/04/02 au 20/04/02, il y a 20 jours et si R(n) est le nombre de rats au bout de n jours, on cherche R(20) et on a :

$\frac{R(1) - R(0)}{R(1)} = 0.8$ et $R(0) = 120$.

D'où $R(1) = 1.08\ R(0)$ et de même $R(2) = 1.08\ R(1) = 1.08^2\ R(0)$, etc …

$R(n) = 1.08^n\ R(0)$. Et si n = 20 $R(20) = 1.08^{20} \times 120 = 559$ (en arrondissant à l'entier le plus proche.

Exercice 2. Un éleveur vend des lapins au marché. Ce marché est hebdomadaire. A son premier marché, il en vend 10 et chaque semaine ses ventes augmentent de 2 lapins. Combien aura-t-il vendu de lapins en un an ?

Solution

1 an = 52 semaines. Si V est le nombre le lapins cherché :

$V = 10 + (10 + 2) + (10 + 2\times2) + (10 + 2\times3) + \dots + (10 + 2\times51)$

$V = 52 \times 10 + 2(1 + 2 + \dots + 51) = 520 + 2\frac{51\times52}{2} = 3\ 172$.

(Rappel d'une formule à savoir : $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$)

Exercice 3. Un fermier achète un couple de lapin. Il observe alors que le nombre de lapins double chaque mois. Combien aura-t-il de lapins au bout de 2 ans ?

Solution

2 ans = 24 mois. Soit L(n), le nombre de lapins du fermier au bout de n mois. On cherche L(24).

$L(0) = 2$

$L(1) = 2\times2 = 2^2$

$L(2) = 2\times2^2 = 2^3$, et en itérant

$L(n) = 2^{n+1}$

($L(n) = 2\ L(n-1)$; L(n) est une suite géométrique de raison 2 et de premier terme 2).

Donc $L(24) = 2^{25} = 33\ 554\ 432$ (a ce niveau la toxoplasmose est inévitable !)

Exercice 4. Une PME de 5 salariés embauche temporairement 2 nouveaux salariés pour faire face à une commande particulière. Quel est le taux de croissance des effectifs de l'entreprise ? La charge de travail de l'entreprise revient à son niveau initial et l'entreprise licencie les 2 salariés temporaires. Quel est alors le taux de variation des effectifs ?

Solution

Si τ est le taux de croissance des effectifs : $\tau = \frac{7 - 5}{5} = 0.4$ ou 40%.

Si τ' est le nouveau taux de croissance des effectifs : $\tau' = \frac{5 - 7}{7} = -0.2857$ ou 28.57%

(en arrondissant au plus proche à la troisième décimale).

Exercice 5. La participation aux élections communales de Saint Laurent fut de 55% en 1998 et de 38% en 2003. Quel est le taux de variation de cette participation ?

Solution

Le taux de variation cherché est : $\frac{55 - 38}{55} = 0.309$ ou 30.9%

Exercice 6. Un indice de prix, calculé à partir de la même année de base, a varié au cours d'une même année n :

- de +20% du 01/01/n au 31/03/n
- de +12% du 01/04/n au 30/06/n
- de –15% du 01/07/n au 31/12/n

Quelle la variation relative de cet indice du 01/01/n au 31/12/n ?

Solution

Notons, 1, 2, 3 et 4, les 4 dates successives de l'énoncé et 0 l'année de base.

$\frac{I_{2/0} - I_{1/0}}{I_{1/0}} = 0.2$ et $I_{2/0} = 1.2\ I_{1/0}$. De même

$I_{3/0} = 1.12\ I_{2/0}$

$I_{4/0} = 0.85\ I_{3/0}$

Donc $I_{4/0} = 0.85 \times 1.12 \times 1.2\ I_{1/0} = 1.1424\ I_{1/0}$.

Et la variation relative cherché, $\frac{I_{4/0} - I_{1/0}}{I_{1/0}} = 0.1424$ ou 14.24%.

Exercice 7. Les prix augmentent de

- 0.1% en janvier
- 0.2% en février
- 0.5% en mars
- 0.4% en avril et mai
- 0.3% en juin, juillet et août
- 0.5% en septembre et octobre
- 0.3% en novembre et décembre.

Quel est le taux annuel d'augmentation des prix ?

Quel est le taux mensuel équivalent ?

Solution

Notons p_0 le prix au 1^er^ janvier, p_1 le prix au 1^er^ février, p_2 le prix au 1^er^ mars, …etc.

$\frac{p_1 - p_0}{p_0} = 0.001$ et $p_1 = 1.001\ p_0$, de même
$p_2 = 1.002\ p_1$
$p_3 = 1.005\ p_2$
$p_4 = 1.004\ p_3$
$p_5 = 1.005\ p_4$ …..$p_{12} = 1.003\ p_{11}$.
D'où $p_{12} = 1.003^2 \times 1.005^2 \times 1.003^3 \times 1.004^2 \times 1.005 \times 1.002 \times 1.001\ p_0 = 1.04177\ p_0$.
D'où la variation relative cherchée : 4.177%.

Si τ est le taux mensuel équivalent $p_{12} = (1 + \tau)^{12}\ p_0 = 1.04177\ p_0$.

D'où $1 + \tau = \sqrt[12]{1.04177}$ et $\tau \approx 0.0034 = 0.34\%$.

Exercice 8. Un ménage a vu ses revenus salariaux augmenter de 15% en un an, dans le même temps, le coût de la vie a augmenté de 8%.
On rappelle que le pouvoir d'achat est égal au quotient des revenus salariaux par le coût de ses moyens de subsistance.
De combien ce pouvoir d'achat a-t-il augmenté ?

Solution

Notons R_1 et R_2 les valeurs des revenus aux 2 périodes considérées. Notons de même C_1 et C_2, les valeurs du coût de la vie et P_1 et P_2 les pouvoirs d'achat. On a
$\frac{R_2 - R_1}{R_1} = 0.15$ et $R_2 = 1.15\ R_1$.
$\frac{C_2 - C_1}{C_1} = 0.08$ et $C_2 = 0.8\ C_1$.
$P_1 = \frac{R_1}{C_1}$ et $P_2 = \frac{R_2}{C_2} = \frac{1.15\ R_1}{1.08\ C_1} = \frac{1.15}{1.08}\ P_1 = 1.0648\ P_1$. et $\frac{P_2 - P_1}{P_1} = 0.0648$ et l'augmentation du pouvoir d'achat est de 6.48%.

Exercice 9. Calculer les élasticités des fonctions suivantes :
1. $f(x) = ax + b$ ($a\in \mathbf{R}^*$ et $b\in \mathbf{R}$) 2. $f(x) = ax^n$ ($a\in \mathbf{R}^*$ et $n\in \mathbf{Q}^*$)

3. $f(x) = 5\sqrt[4]{x^3}$ 4. $f(x) = \frac{x + 1}{\sqrt[3]{x^2}}$ 5. $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x + 1}$ 6. $f(x) = \sqrt[5]{1 + 1/x}$

Solution

1. Si $x \neq -b/a$, $\varepsilon_f = \frac{a}{ax + b}\ x = \frac{ax}{ax + b}$. Et $\varepsilon_f = 1$ si $b = 0$.
2. Si $x \neq 0$, en utilisant les résultats de l'exemple **4** ($\varepsilon_{af} = \varepsilon_f$ et $\varepsilon_{f^n} = n\ \varepsilon_f$) et le résultat précédent pour $a = 1$ et $b = 0$, $\varepsilon_f = n$.
3. Pour $x > 0$, $f(x) = 5\ x^{3/4}$ et en utilisant les résultats de l'exemple **4** ($\varepsilon_{af} = \varepsilon_f$ et $\varepsilon_{f^n} = n\ \varepsilon_f$) avec $n = \frac{3}{4}$, $\varepsilon_f = \frac{3}{4}$.
4. Pour $x \neq 0$, $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x) = x + 1$ et $v(x) = x^{2/3}$.

Et puisque $\frac{(u/v)'}{u/v} = \frac{(u'v - uv')/v^2}{u/v} = \frac{u'v - uv'}{uv} = \frac{u'}{u} - \frac{v'}{v}$, $\varepsilon_{u/v} = \varepsilon_u - \varepsilon_v$ et $\varepsilon_{1/v} = - \varepsilon_v$. Et en utilisant les résultats précédents : $\varepsilon_f = \frac{x}{x+1} - \frac{2}{3}$.

5. En utilisant le résultat précédent et $\varepsilon_{1/v} = - \varepsilon_v$, pour $x \neq -1$, $\varepsilon_f = \frac{2}{3} - \frac{x}{x+1}$.

6. $f(x) = (1 + 1/x)^{1/5}$ et pour $x > 0$ ou $x < -1$, $\varepsilon_f = \frac{1}{5}\ \varepsilon_{(x+1)/x} = \frac{1}{5}\ (\frac{x}{x+1} - 1) = \frac{-1}{5(1+x)}$.

Exercice 10. x vaut 10 avec une incertitude de 0.1, quelle est l'incertitude sur y dans les cas suivants :

- $y = 4x - 1$
- $y = 2x^2 + 4x - 5$
- $y = \frac{x+3}{x+2}$
- $y = \sqrt{x+4}$

Solution

• $y = 4x - 1$ e t $9.9 \leq x \leq 10.1$. $x \to 4x - 1$ étant croissante sur **R**
$38.6 \leq y \leq 39.4$ et $|y - 39| \leq 0.4$ (39 est la valeur de y pour x = 10).
Et y = 39 avec une incertitude de 0.4.

• $y = 2x^2 + 4x - 5$
$f : x \to 2x^2 + 4x - 5$ est une fonction du second degré et on sait (c.f. leçon 2) que cette fonction est croissante sur $[-1 ; +\infty[$, donc
si $9.9 \leq x \leq 10.1$, $230.62 \leq f(x) \leq 237.42$. Or $f(10) = 235$, et $|y - 235| \leq 4.42$. Ainsi l'incertitude sur y est de 4.42.

• $y = \frac{x+3}{x+2} = 1 + \frac{1}{x+2}$ et la fonction $f : x \to 1 + \frac{1}{x+2}$ est décroissante sur $]-2 ; +\infty[$ (c.f. leçon 2) et si si $9.9 \leq x \leq 10.1$, $1.083 \leq f(x) \leq 1.084$. Or $f(10) = \frac{13}{12}$ et
$|y - \frac{13}{12}| \leq 0.00067$. Ainsi l'incertitude sur y est de 0.00067.

• $y = \sqrt{x+4}$. De même $f : x \to \sqrt{x+4}$ est croissante sur $]-4 ; +\infty[$ et si $9.9 \leq x \leq 10.1$, $3.72827 \leq f(x) \leq 3.755$. Or $f(10) = \sqrt{14}$ et $|y - \sqrt{14}| \leq 0.0134$. Et l'incertitude sur y est 0.0134.

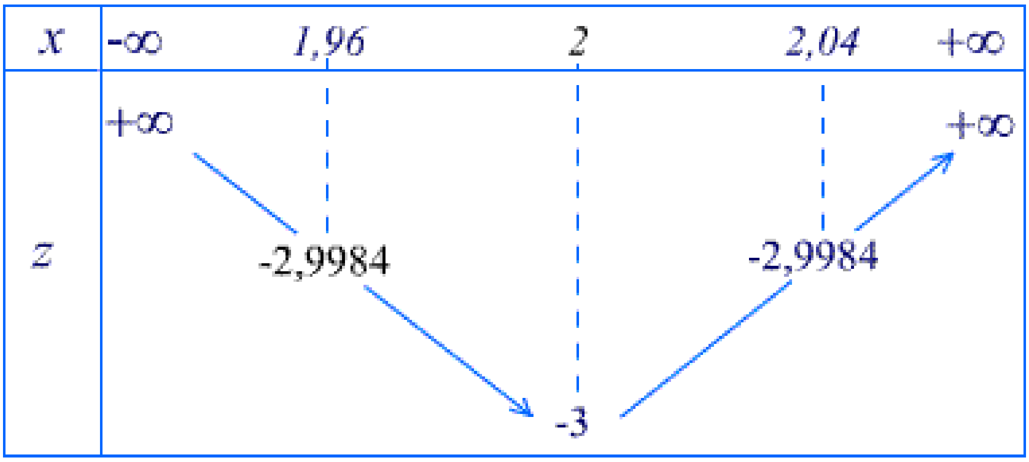
Exercice 11. x vaut 2 avec une incertitude relative de 2%. Quelle l'incertitude relative sur z dans les cas suivants :

- $z = 5x + 1$
- $z = x^2 - 4x + 1$
- $z = \frac{2x+3}{x}$
- $z = \sqrt{x+1}$

Solution

• $z = 5x + 1$ et $-0.02 \le \frac{x - 2}{2} \le 0.02$. Donc $1.96 \le x \le 2.04$.Or $f : x \to 5x + 1$ est croissante sur **R**, donc $10.8 \le z \le 11.2$. Or $f(2) = 11$ et $|\frac{z - 11}{11}| \le 0.0182$. Ainsi l'incertitude relative sur z est de 1.82%.

• $z = x^2 - 4x + 1$. On a le tableau de variation suivant



Donc si $1.96 \le x \le 2.04$, on a $-3 \le z \le -2.9984$ et $|\frac{z - (-3)}{-3}| \le 0.000534$, et l'incertitude relative sur z est de 0.0534%.

• $z = \frac{2x + 3}{x} = 2 + \frac{3}{x}$. La fonction $f : x \to 2 + \frac{3}{x}$ est décroissante sur $]0 ; +\infty[$ et si

si $1.96 \le x \le 2.04$, $3.47 \le f(x) \le 3.531$ et $f(2) = 3.5$. Donc $|\frac{z - 3.5}{3.5}| \le 0.00886$ et l'incertitude relative sur z de 0.886%.

• $z = \sqrt{x + 1}$, la fonction $f : x \to \sqrt{x + 1}$ est croissante sur $]-1 ; +\infty[$ et si $1.96 \le x \le 2.04$, $172046 \le f(x) \le 1.7436$ et $f(2) = \sqrt{3}$. Donc $|\frac{z - \sqrt{3}}{\sqrt{3}}| \le 0.0067$ et l'incertitude relative sur z de 0.67%.

Exercice 12. Soient $S(x) = \ln(10 + x)$ et $D(x) = -x + 12$, les fonctions d'offre et de demande d'un certain produit. Trouver au millième près la valeur de x qui équilibre l'offre et la demande de ce produit.

Solution

Il s'agit donc de résoudre $\ln(x + 10) = -x + 12$ ou $f(x) = \ln(x + 10) + x - 12 = 0$.
On peut utiliser la méthode décrite dans la leçon 3 (application du théorème des valeurs intermédiaires).

Nous suggérons ici une autre méthode plus rapide.
En tâtonnant à la calculette (une calculette graphique peut aider) on trouve rapidement que $f(9) \approx -0.056$. La solution cherchée est donc proche de 9
0r un développement limité de f au voisinage de 9 et à l'ordre 2 donne :
(on pose $x = 9 + h$)

$f(9 + h) = \ln(19 + h) + h - 3 = \ln 19 + \ln(1 + \frac{h}{19}) + h - 3$

$f(9 + h) = \ln 19 - 3 + h + \frac{h}{19} + \frac{h^2}{36}$ + reste (le reste est négligeable devant le terme qui précède lorsque h est voisin de 0).

$f(9 + h) = \ln 19 - 3 + \frac{20h}{19} + \frac{h^2}{36}$ + reste

0r $\ln 19 - 3 + \frac{20h}{19} = 0$, donne $h \approx 0.053$ et l'erreur faite est sur $f(9 + h)$ est inférieure à 0.00008 ($\frac{h^2}{36} \approx 0.00007803$) , soit $-0.00008 \leq f(9 + h) \leq 0.00008$.

La solution cherchée est donc $x = 9.053$ au millième près.

Exercice 13

Une entreprise vend des télévisions (bien 1) et des radios (bien 2). On s'intéresse aux quantités vendues et aux prix entre deux périodes.
On donne $Q_1 = 10000$, $P_1 = 1000€$, $\Delta Q_1 = -100$ et $\Delta P_1 = 10€$ et
$Q_2 = 30000$, $P_2 = 30€$, $\Delta Q_2 = -1000$ et $\Delta P_2 = 5€$.

1. A votre avis, pour lequel des 2 appareils la vente est-elle le plus sensible aux prix ?
2. Calculer la variation de quantité en pourcentage et la variation des prix en pourcentage pour chacun des deux biens.
3. Quel est le meilleur indicateur pour répondre à la première question ?

Solution

1. Dans un premier temps on peut s'intéresser à l'indicateur $\frac{\Delta Q}{\Delta P}$. Pour les télévisions on obtient $\frac{\Delta Q_1}{\Delta P_1} = -10$. Pour les radios on a $\frac{\Delta Q_2}{\Delta P_2} = -200$. Ainsi les ventes de radios semblent plus sensibles à la variation des prix que les ventes de télévisions.

2. La variation de quantité en pourcentage pour le bien 1 est : $\frac{\Delta Q_1}{Q_1} \times 100 = -1\%$

La variation de prix en pourcentage pour le bien 1 est : $\frac{\Delta P_1}{P_1} \times 100 = 1\%$

La variation de quantité en pourcentage pour le bien 2 est : $\frac{\Delta Q_2}{Q_2} \times 100 = -\frac{10}{3}\%$

La variation de prix en pourcentage pour le bien 2 est : $\frac{\Delta P_2}{P_2} \times 100 = \frac{50}{3}\%$

3. Comme dans le cours on peut alors penser à utiliser l'élasticité qui est le rapport de ces variations en pourcentage :

pour le bien 1 : $\varepsilon_1 = \frac{\frac{\Delta Q_1}{Q_1}}{\frac{\Delta P_1}{P_1}} = -1$

pour le bien 2 : $\varepsilon_2 = \frac{\frac{\Delta Q_2}{Q_2}}{\frac{\Delta P_2}{P_2}} = -0.2$.

Cet indicateur est beaucoup plus pertinent puisqu'il tient par exemple compte du fait qu'un téléviseur est plus cher au départ qu'une radio mais qu'on en vend moins. Si on utilise cet un indicateur on conclut que les ventes de télévisions sont plus sensibles aux variations de prix.