# Leçon 06 - Exercices

***Rappel du cours** : pour u voisin de 0*

$$\frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + u^3 + \ldots + u^n + ux^n\, \varepsilon(u) \qquad u$$

$$(1 + u)^m = 1 + mu + \frac{m(m-1)}{2!}\, u^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}\, u^n + {}^n\, \varepsilon(u) \quad (m \in \boldsymbol{R})$$

$$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{u^n}{n} + u^n\, \varepsilon(u)$$

$$e^u = 1 + \frac{u}{1!} + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + \ldots + \frac{u^n}{n!} + u^n\, \varepsilon(u)$$

*$\varepsilon$ désigne une fonction qui tend vers 0 en 0.*

**Exercice 1.** Soit $f(x) = \ln(2x + 3)$ pour $x \geq -1$.

1) Donner une majoration de $f'(x)$ et en déduire une majoration dre $\ln(2x + 3)$ par un polynôme de degré 1 sur $[-1 ; +\infty[$.

2) Donner alors une majoration de ln3.

**Exercice 2.** Soit $f(x) = \sqrt{3x + 4}$ pour $x \geq 0$.
1) Montrer que pour tout x et y positifs :

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{3}{4}\, |x - y|$$

2)* Montrer que pour tout $x > 0$,

$$|f(x) - 4| \leq \frac{3}{4}\, |x - 4|.$$

**Exercice 3.** Soit $f(x) = \exp(-x^2 + 3x) + x$ sur $[0 ; 3]$. Montrer que le théorème des accroissements finis s'applique et déterminer c graphiquement puis par le calcul.

**Exercice 4.*** Soient $g : x \to \frac{1}{x^2}\exp(\frac{1}{x})$ et $f : x \to \frac{1}{2}\exp(\frac{1}{x}) + \frac{1}{2}x$.

1) Montrer que g est une bijection de $[1 ; +\infty[$ dans un intervalle I que l'on déterminera.

2) Montrer que pour tous x et y de $[1 ; +\infty[$ :

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{e - 1}{2}\, |x - y|.$$

**Exercice 5.** Déterminer les D.L. au voisinage de 0 et à l'ordre 4 des fonctions suivantes :
1) $f : x \to \sqrt{1 - x^2}$ (on montrera que l'on peut poser $u = -x^2$ et utiliser le rappel du cours cité au début de ces énoncés)

2) $f : x \to \ln(\frac{1}{2} + x)$ ( on pourra mettre $\frac{1}{2}$ en facteur, montrer que l'on peut poser $u = 2x$ et utiliser le rappel du cours cité au début de ces énoncés)
3) $f : x \to \exp(x^2 + x + 1)$ (on montrera que l'on peut poser $u = x^2 + x + 1$ et utiliser le rappel du cours cité au début de ces énoncés)
4) $f : x \to 2^{x+1}$ (on pourra écrire $2^{x+1}$ sous la forme d'une exponentielle, montrer que l'on peut poser $u = x\ln 2$ et utiliser le rappel du cours cité au début de ces énoncés)

**Exercice 6.** Donner un D.L. à l'ordre 2 et au voisinage de 0 de $x \to \ln(1 + e^x)$.

**Exercice 7**
1) Donner le D.L. à l'ordre 2 et au voisinage de 1 de $g : x \to 1 + (x - 1)e^{x-1}$.
2) Donner un D.L. à l'ordre 2 et au voisinage de 1 de $f : x \to \ln(1 + (x-1)e^{x-1})$.
3) Soit h la fonction définie par $h(x) = \frac{f(x)}{x - 1}$ et $h(1) = 1$. Montrer que h est continue et dérivable en 1.

**Exercice 8.** Calculer à l'aide d'un D.L. adequat, $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2}$.

**Exercice 9.**
1) Déterminer le D.L. à l'ordre 2 et au vosinage de 1 de $x \to x\ln x$.
2) En déduire $\lim_{x\to 1} \frac{x\ln x}{x^2 - 1}$.

**Exercice 10.** Soit $f : x \to e^{1/x}\sqrt{x^2 - 1}$.
1) Déterminer un D.L. d'ordre 3 de $\frac{f(x)}{x}$ au voisinage de $+\infty$.
2) En déduire que C(f) admet une asymptote oblique quand $x \to +\infty$.
3) Etudier la position de C(f) par rapport à cette asymptote.
4) Faire de même pour $x \to -\infty$ , sans recommencer tous les calculs.

**Exercice 11.** Soit $f : x \to \sqrt[3]{4x^3 - 12x}$ pour $x > 3$.
1) Déterminer un D.L. d'ordre 2 de $\frac{f(x)}{x}$ au voisinage de $+\infty$.
2) En déduire que C(f) admet une asymptote oblique quand $x \to +\infty$.
3) Etudier la position de C(f) par rapport à cette asymptote.

**Exercice 12.** Soit $f : x \to (x-2)\exp(\frac{x-1}{2x})$.

1) Déterminer un D.L. d'ordre 2 de $\frac{f(x)}{x}$ au voisinage de $+\infty$.

2) En déduire que C(f) admet une asymptote oblique quand $x \to +\infty$.
3) Etudier la position de C(f) par rapport à cette asymptote.

---

**Exercice 13.**[*] Soit l'expression $f(x,y) = x\ln y - (y-1)\ln x - y + 1$.
Etudier le signe de f(x,y) pour x et y voisins de 1.

---

## Indications

Exercice **11** : On remarquera que

$$\sqrt[3]{4x^3 - 12x} = \sqrt[3]{4x^3(1 - \frac{3}{x^2})} = \sqrt[3]{4x^3}\,\sqrt[3]{1 - \frac{3}{x^2}} = \sqrt[3]{4}\, x(1 - \frac{3}{x^2})^{1/3}.$$